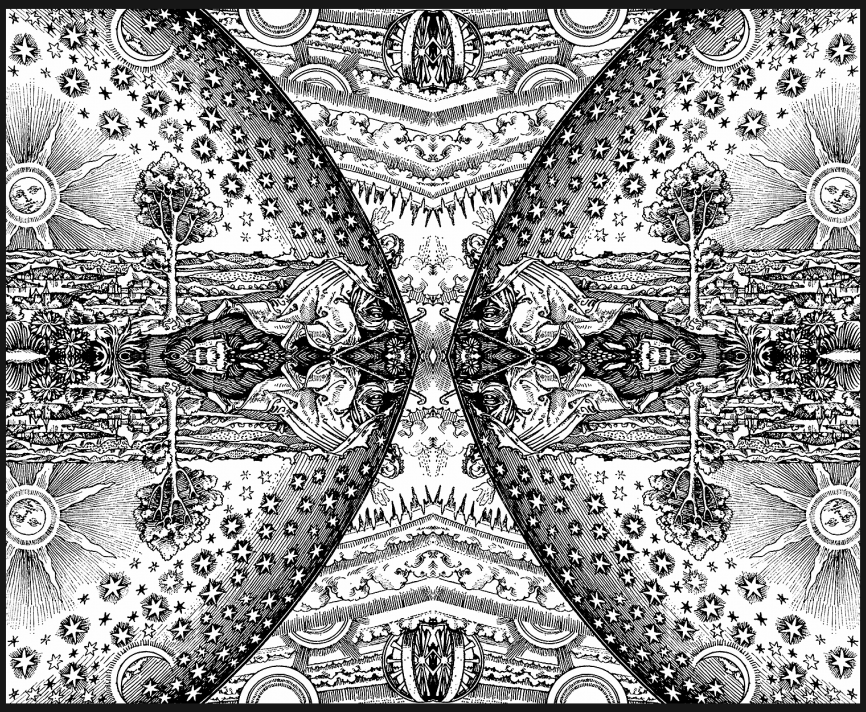
AMERICAN RESEARCH PRESS

CHAMPS, VIDE, ET UNIVERS MIROIR

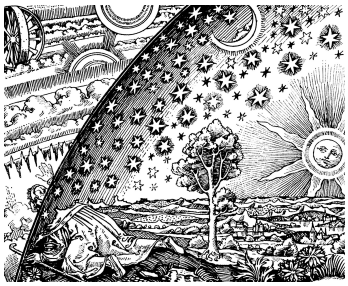
PAR
LARISSA BORISSOVA ET DMITRI RABOUNSKI



Larissa Borissova et Dmitri Rabounski

CHAMPS, VIDE, ET UNIVERS MIROIR

Traduit de l'anglais et édité
par
Patrick Marquet
Docteur en Physique,
diplomé de la Faculté des Sciences de Paris



American Research Press
Rehoboth, New Mexico, USA
— 2010 —

Originally written by Larissa Borissova and Dmitri Rabounski, 2001. Translated into French and edited by Patrick Marquet, 2010. Please, send all comments on the book to the Authors or the Editor.

Copyright © Larissa Borissova and Dmitri Rabounski, 2010

All rights reserved. Electronic copying, print copying and distribution of this book for non-commercial, academic or individual use can be made by any user without permission or charge. Any part of this book being cited or used howsoever in other publications must acknowledge this publication. No part of this book may be reproduced in any form whatsoever (including storage in any media) for commercial use without the prior permission of the copyright holder. Requests for permission to reproduce any part of this book for commercial use must be addressed to the Authors. The Authors retain their rights to use this book as a whole or any part of it in any other publications and in any way they see fit. This Copyright Agreement shall remain valid even if the Authors transfer copyright of the book to another party.

This book was typeset using the LaTeX typesetting system. Powered by Ubuntu Linux.

Cover image : A collage composed on the basis of an enigmatic woodcut by an unknown artist of the Middle Ages. It is referred to as the *Flammarion Woodcut* because its appearance in page 163 of Camille Flammarion's *L'Atmosphère : Météorologie populaire* (Paris, 1888), a work on meteorology for a general audience. The woodcut depicts a man peering through the Earth's atmosphere as if it were a curtain to look at the inner workings of the Universe. The caption "Un missionnaire du moyen âge raconte qu'il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent..." translates to "A medieval missionary tells that he has found the point where heaven [the sense here is "sky"] and Earth meet...".

This book can be ordered in a paper bound reprint from :

Books on Demand, ProQuest Information and Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road, P. O. Box 1346, Ann Arbor, MI 48106-1346, USA
Tel. : 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/

This book can be ordered on-line from :

Publishing Online, Co. (Seattle, Washington State)
http://PublishingOnline.com

ISBN 978-1-59973-123-0

American Research Press, Box 141, Rehoboth, NM 87322, USA
Standard Address Number : 297-5092
Printed in the United States of America

Table des Matières

Préface à la traduction française 6

Chapitre 1 Introduction

§ 1.1 Mouvement géodésique des particules 7
§ 1.2 Quantités physiquement observables 12
§ 1.3 Équation dynamiques du mouvement de particules libres . . . 20
§ 1.4 Mouvement non géodésique des particules. Position du problème 27

Chapitre 2 Algebre tensorielle et analyse

§ 2.1 Tenseurs et algèbre tensorielle 32
§ 2.2 Produit scalaire de vecteurs 37
§ 2.3 Produit vectoriel de vecteurs. Tenseurs antisymétriques. Pseudo-tenseurs 39
§ 2.4 Différentielles et dérivées directionnelles 45
§ 2.5 Divergence et rotationnel 47
§ 2.6 Opérateurs de Laplace et de d'Alembert 56
§ 2.7 Conclusions 59

Chapitre 3 Mouvement des particules chargees

§ 3.1 Position du problème 60
§ 3.2 Composantes observables du tenseur du champ électromagnétique. Les invariants du champ 61
§ 3.3 Les équations de Maxwell, leurs composantes observables. Conservation de la charge électrique. Condition de Lorentz . 66
§ 3.4 Les équations de d'Alembert pour le potentiel électromagnétique et leurs composantes observables 73
§ 3.5 La force de Lorentz. Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique 78
§ 3.6 Equations du mouvement d'une particule chargée par la méthode du transport parallèle 84

§ 3.7 Equations du mouvement déduites du principe de moindre action en tant que cas particulier des équations précédentes . . . 90
§ 3.8 La structure géométrique du potentiel électromagnétique quadridimensionnel . . . 93
§ 3.9 Les équations minkowskiennes comme cas particulier des équations du mouvement obtenues . . . 98
§ 3.10 Structure d'un espace empli d'un champ électromagnétique stationnaire . . . 101
§ 3.11 Mouvement dans un champ électrique stationnaire . . . 103
§ 3.12 Mouvement dans un champ magnétique stationnaire . . . 114
a) Champ magnétique colinéaire au champ non holonome . . . 118
b) Champ électrique orthogonal au champ non holonome . . . 127
§ 3.13 Mouvement dans un champ électromagnétique stationnaire . . . 130
a) Champ magnétique orthogonal au champ électrique et parallèle au champ non holonome . . . 134
b) Champ magnétique parallèle au champ électrique et orthogonal au champ non holonome . . . 136
§ 3.14 Conclusions . . . 139

Chapitre 4 Mouvement des particules douées de rotation intrinsèque

§ 4.1 Position du problème . . . 141
§ 4.2 Impulsion d'une particule en rotation dans les équations du mouvement . . . 146
§ 4.3 Les équations du mouvement d'une particule en rotation intrinsèque . . . 150
§ 4.4 Les conditions physiques de l'interaction de la rotation intrinsèque . . . 158
§ 4.5 Mouvement des particules élémentaires en rotation . . . 162
§ 4.6 Particule en rotation dans un champ électromagnétique . . . 170
§ 4.7 Mouvement dans un champ magnétique stationnaire . . . 176
a) Champ magnétique colinéaire au champ non holonome . . . 179
b) Champ magnétique orthogonal au champ non holonome . . . 185

§ 4.8 Loi de la quantification pour les masses des particules élémentaires . . . 188
§ 4.9 Longueur d'onde de Compton . . . 193
§ 4.10 Particules en rotation dépourvues de masse . . . 194
§ 4.11 Conclusions . . . 202

Chapitre 5 Le vide physique

§ 5.1 Introduction . . . 203
§ 5.2 Densité observable du vide. Introduction de la classification T pour la matière . . . 212
§ 5.3 Propriétés physiques du vide. Cosmologie . . . 215
§ 5.4 Le concept de l'inversion. L'explosion de l'Univers . . . 223
§ 5.5 Forces gravitationnelles non newtoniennes . . . 226
§ 5.6 Collapse gravitationnel . . . 228
§ 5.7 Collapse inflationnaire . . . 234
§ 5.8 Conclusions . . . 237

Chapitre 6 L'Univers miroir

§ 6.1 Le concept de l'Univers miroir . . . 239
§ 6.2 Condition de passage à travers la membrane vers l'Univers miroir . . . 248
§ 6.3 Conclusions . . . 251

Annexe A Notations des grandeurs physiques . . . 252
Annexe B Notations d'algèbre et analyse tensorielles . . . 254
Bibliographie . . . 257
Index . . . 261

Préface à la traduction française

Cet ouvrage est la traduction française du livre *Fields, Vacuum and the Mirror Universe* publié originalement en anglais en 2009, par les physiciens Larissa Borissova et Dmitri Rabounski, enrichi de nouveaux exposés.

Le livre propose une analyse physico-mathématique nouvelle en élaborant une théorie des observables dans le cadre de la relativité générale. Dans leur célèbre livre de référence *Théorie des Champs*, Lev Landau et Evgeny Lifshitz ont décrit de manière très complète le mouvement des particules dans les champs électromagnétique et gravitationnel. Les méthodes d'analyse covariante alors en vigueur depuis le milieu des années 30 ne prenaient pas encore en compte les concepts de quantités physiquement observables (grandeurs chronologiquement invariantes ou plus précisément grandeurs dites "chronométriques") de la relativité générale. Les auteurs ont donc voulu insister sur la nécessité d'étendre cette perspective mathématique à la théorie physique existante en l'appliquant au mouvement des particules se déplaçant dans les champs électromagnétiques et gravitationnels. De plus, l'étude des mouvements d'une particule douée de moment de rotation intrinsèque, n'a pas été entreprise dans ce contexte par Landau et Lifshitz. C'est pourquoi un exposé séparé du livre a été entièrement consacré à ce type de mouvement particulier. Les auteurs ont également ajouté un chapitre redéfinissant les éléments d'algèbre tensorielle et d'analyse dans le cadre des invariants chronométriques. L'ensemble de cet ouvrage se présente alors comme une contribution supplémentaire à la *Théorie des Champs*.

Paris, le 17 juin 2010 *Patrick Marquet*

Chapitre 1 Introduction

§ 1.1 Mouvement géodésiques des particules

A ce jour, nombreuses ont été les expérimentations destinées à valider les conclusions théoriques qui ont été en mesure de démonter que l'espace-temps (l'espace quadridimensionnel pseudo-riemannien) constitue la base de la réalité géométrique de notre Univers.

En dépit des récents progrès accomplis en physique expérimentale et en astronomie et qui ont pu permettre la mise en évidence de nouveaux effets, l'espace-temps pseudo-riemannien demeure toujours la meilleure description de notre environnement et qui peut toujours offrir de multiples perspectives généralisatrices. C'est pourquoi lorsque nous étudions la théorie du mouvement des particules, nous la situons d'emblée dans l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel. A partir de là, il importe de s'attarder, nous semble-t-il, sur une terminologie fondamentale. Ainsi qu'il est bien connu, l'espace-temps de la relativité générale est un *espace riemannien** à quatre dimensions et de signature $(+---)$ ou $(-+++)$. Celui-ci implique une décomposition (3+1) des axes de coordonnées en 3 coordonnées spatiales et un axe temporel. Pour la commodité des calculs ultérieurs, nous choisirons un espace riemannien de signature $(+---)$ où le temps est réel et les coordonnées spatiales imaginaires. Signalons d'autres théories issues de la relativité générale, où l'emploi d'un temps imaginaire et des axes spatiaux réels requiert donc une signature $(-+++)$, ainsi que celles utilisant une signature dite elliptique $(++++)$. Un espace dont la signature est alternée (signature hyperbolique) est normalement appelé *espace pseudo-riemannien*, mais dans tous les cas de figure, les propriétés géométriques sont celles de la géométrie de Riemann, et le préfixe "pseudo" ne s'impose plus du seul point de vue mathématique. Nous conserverons néanmoins cette notation qui est traditionnellement adoptée dans tous les ouvrages de référence.

*Un espace métrique dont la géométrie est définie par sa métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ est appelé métrique de Riemann. Bernhard Riemann (1826–1866) est un mathématicien allemand fondateur de la géométrie riemannienne (1854).

Considérons le mouvement d'une particule dans l'espace pseudo-riemannien. Sa trajectoire soumise à la gravitation est une ligne *géodésique* de cet espace. La présence d'autres forces rend bien évidemment ce mouvement *non géodésique*.

Du point de vue de la géométrie différentielle, le mouvement de cette particule dans l'espace riemannien, peut être représenté par un transport parallèle du 4-vecteur Q^α qui est tangent en chaque point de sa trajectoire. Par conséquent, les équations du mouvement de la particule sont définies par ce transport parallèle du vecteur Q^α le long de sa trajectoire quadridimensionnelle et constituent donc les équations de la dérivée absolue de ce vecteur par rapport à un paramètre ρ non nul de telle façon que l'on ait

$$\frac{\mathrm{D}Q^\alpha}{d\rho} = \frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Q^\mu \frac{dx^\nu}{d\rho}\,, \qquad \alpha, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

Ici $\mathrm{D}Q^\alpha = dQ^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Q^\mu dx^\nu$ est la différentielle absolue (accroissement absolu dans l'espace de Riemann) du vecteur Q^α. La différentielle absolue diffère de la différentielle ordinaire dQ^α par la présence des symboles de Christoffel de deuxième espèce $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ (coefficients dits de cohérence de l'espace riemannien), définis à partir des symboles de Christoffel de première espèce $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$, eux-mêmes fonctions des dérivées premières du tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$*

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\rho}\,\Gamma_{\mu\nu,\rho}\,, \quad \Gamma_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right). \tag{1.2}$$

Le transport parallèle d'un vecteur le long d'une trajectoire géodésique s'effectue au sens de Levi-Civita†. Dans ce cas, la dérivée absolue de n'importe quel vecteur transporté est nulle, condition vérifiée en particulier pour le 4-vecteur de la particule

$$\frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Q^\mu \frac{dx^\nu}{d\rho} = 0\,, \tag{1.3}$$

de telle façon à ce que la carré du vecteur transporté demeure inchangé $Q_\alpha Q^\alpha = conste$ le long de la trajectoire. Ces équations sont dites équa-

*Les coefficients de cohérence d'un espace riemannien (symboles de Christoffel), ont été définis par le mathématicien allemand Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) qui les a obtenu en 1869. Dans l'espace-temps de la relativité restreinte (espace de Minkowski), on peut toujours trouver un système de référence inertiel par lequel la matrice du tenseur métrique fondamental est diagonalisé à l'unité, de façon à annuler les symboles de Christoffel.

†Le mathématicien Tullio Levi-Civita (1873–1941) a été le premier à étudier cette notion de transport vectoriel.

tions du mouvement libre.

Le mouvement d'une particule libre est caractérisé par le 4-vecteur de son accélération également appelé le *vecteur cinématique*

$$Q^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\rho}\,. \tag{1.4}$$

Donc le transport parallèle de Levi-Civita de ce vecteur fournit les équations de la trajectoire quadridimensionnelle de la particule (*équations des lignes géodésiques*)

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\rho}\frac{dx^\nu}{d\rho} = 0\,. \tag{1.5}$$

La condition nécessaire $\rho \neq 0$ le long de la trajectoire implique que les paramètres ρ sont différents suivant que les trajectoires appartiennent à une catégorie distincte.

Dans l'espace pseudo-riemannien, 3 genres de trajectoires principales sont possibles correspondant à des particules d'un genre spécifique, à savoir :

1) Les *trajectoires réelles non isotropes*, qui se situent à l'intérieur de l'hypercône de lumière. Le long de telles trajectoires, le carré de l'intervalle d'espace-temps est $ds^2 > 0$, donc l'intervalle ds est réel. Les lignes de ces propagations caractérisent des particules massives ordinaires réelles à vitesse subluminique ;
2) Les *trajectoires imaginaires non isotropes* qui se situent au-delà de l'hypercône de lumière. Le long de ces trajectoires le carré de l'intervalle d'espace-temps est $ds^2 < 0$, donc ds est imaginaire. Ces lignes de propagation caractérisent des particules supra luminiques dont les masses sont relativistes et sont appelées *tachyons** ;
3) Les *trajectoires isotropes* qui se situent sur la surface de l'hypercône de lumière et qui caractérisent celles de particules dépourvues de masse (particules du genre temps) qui se déplacent à la vitesse de la lumière. Le long de ces trajectoires l'intervalle d'espace-

*Tachyons — particules supraluminiques. L'existence de tachyons et de signaux supraluminiques fût d'abord considérée dans le cadre de la relativité restreinte en 1958 par Tangherlini dans sa dissertation [2]. Comme souligné par Malykins [3], la plupart des recherches menées sur les tachyons n'ont malheureusement jamais pris en compte ces études. Le concept des tachyons avait été entretemps abondamment revu dans les publications de Tangherlini [4, 5]. Ce thème fût en tout premier lieu révélé par des publications sur la relativité restreinte dans un premier essai de 1960 [6] signé par Terletskii et dans une publication plus détaillée de 1962 [7] rédigée par Bilaniuk, Deshpande et Sudarshan. Le terme "tachyons" a été trouvé pour la première fois par Feinberg en 1967 [8]. Voir l'étude de Malykins pour plus de détails.

temps est nul, $ds^2 = 0$, mais l'intervalle tridimensionnel n'est pas égal à zéro.

L'intervalle d'espace-temps ds est habituellement pris comme paramètre de dérivation le long de trajectoires non isotropes. Néanmoins, cet intervalle n'est pas applicable aux particules dépourvues de masse, car dans ce cas $ds = 0$. Pour résoudre cette problématique, Zelmanov [9] proposa une variable différente qui ne s'annule pas le long de ces trajectoires isotropes, et qui peut donc toujours être utilisée en tant que paramètre de dérivation. Dans l'espace spatial tridimensionnel, on définit donc l'intervalle physiquement observable

$$d\sigma^2 = \left(- g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k , \tag{1.6}$$

différent de l'élément de longueur tridimensionnel habituel. Notons que Landau et Lifshitz parvinrent à une conclusion identique dans leur ouvrage célèbre : *Théorie des Champs* [10, §84].

Substituant les paramètres de différentiation respectifs dans les équations généralisées des géodésiques (1.5), on parvient aux équations des géodésiques non isotropes (particules massives)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 , \tag{1.7}$$

et à celles des géodésique non isotropes (particules du genre lumière)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 . \tag{1.8}$$

Afin d'obtenir une représentation globale claire du mouvement de la particule, nous devons établir les équations dynamiques qui sont caractérisées par les propriétés de celles-ci (masse, énergie, etc.).

On définira d'abord la 4-impulsion d'une particule libre (géodésique non isotrope)

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} , \tag{1.9}$$

où m_0 est la masse au repos de cette particule. Géométriquement, le transport parallèle de P^α au sens de Levi-Civita définit les équations dynamiques du mouvement de la particule massive

$$\frac{dP^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} P^\mu \frac{dx^\nu}{ds} = 0 , \qquad P_\alpha P^\alpha = m_0^2 = conste. \tag{1.10}$$

De même, le mouvement d'une particule du genre lumière (géodé-

sique isotrope) est elle, caractérisée par son propre 4-vecteur d'onde

$$K^\alpha = \frac{\omega}{c}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{1.11}$$

où ω est une fréquence cyclique spécifique de cette particule dépourvue de masse. Par ailleurs, le transport parallèle au sens de Levi-Civita du vecteur K^α s'exprime par les équations dynamiques du mouvement

$$\frac{dK^\alpha}{d\sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} K^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0\,, \qquad K_\alpha K^\alpha = 0 \tag{1.12}$$

qui caractérise donc une particule libre dépourvue de masse.

Observons que le formalisme quadridimensionnel covariant introduit ici présente des avantages et des inconvénients. D'une façon évidente l'avantage est de préserver l'invariance par changement de référentiel. L'inconvénient de ce formalisme réside dans le fait qu'il masque les quantités tridimensionnelles qui vont servir à la mesure par un observateur donné, de résultats d'expérimentations données (*quantités physiques observables*). On peut donc en déduire que sous forme covariante générale, les équations du mouvement ne seraient qu'un résultat théorique intermédiaire non exploitable dans les situations réelles. Pour rendre compte de ces résultats théoriques suivant une méthodologie plus appropriée, il convient donc de formuler ces équations à l'aide de grandeurs physiquement observables. En d'autres termes, pour calculer les trajectoires observables d'une particule, nous devons définir les équations covariantes de son mouvement à partir d'observables liés au référentiel de l'observateur.

Ce faisant, la définition de quantités physiquement observables est loin de constituer un problème trivial. A titre d'exemple, pour un 4-vecteur Q^α (4 composantes) nous pouvons supposer de manière heuristique que ses 3 composantes spatiales forment un 3-vecteur observable, tandis que la composante temporelle est elle *potentiellement* observable (ce qui ne prouve pas pour autant que celles-ci puissent être observées en général). Par contre, un tenseur contravariant de 2ème rang $Q^{\alpha\beta}$ (16 composantes) rend la nature du problème plus complexe. Pour les tenseurs de rang supérieur le problème de la définition heuristique des composantes observables est éminemment plus compliqué. Par ailleurs, un obstacle sérieux surgit lorsque l'on considère les composantes mixtes d'un tenseur observable.

On peut néanmoins contourner cette difficulté en construisant une nouvelle théorie mathématique qui permette de calculer les composantes observables de n'importe quelle quantité tensorielle. Une telle théorie a

été élaborée par Zelmanov en 1944 [9]. Il est à noter que plusieurs chercheurs se sont déjà penché sur la théorie des quantités observables au cours des années 40. Dans leur ouvrage réputé *Théorie des Champs* [10], Landau et Lifshitz introduisaient déjà la notion de "synchronisation" de deux intervalles tridimensionnels observables, préfigurant de fait la théorie clairement énoncée par Zelmanov. Les auteurs se limitèrent malheureusement à ces deux cas particuliers et ne poursuivirent pas dans la recherche d'une méthode mathématique générale qui puisse définir systématiquement des quantités physiquement observables dans l'espace pseudo-riemannien.

Par la suite, Zelmanov améliora son appareil mathématique destiné à généraliser le principe du concept d'observables physiques en publiant ses résultats [11–13] (*Théorie des invariants chronologiques* ou plus précisément *Théorie des invariants chronométriques*). Indépendamment de Zelmanov, le mathématicien italien Cattaneo [14–17] développa plus tard (1958) une première étude se rapportant à une théorie similaire, mais cette dernière resta inachevée.

Au prochain paragraphe §1.2, nous exposerons un bref aperçu de la théorie des observables de Zelmanov qui nous sera indispensable pour appréhender les développements mathématiques ultérieurs.

En §1.3, nous présenterons les principaux résultats déduits de cette méthode se rapportant au mouvement géodésique d'une particule. En §1.4, nous nous attacherons à établir les équations de cette particule le long de trajectoires non géodésiques, c'est-à-dire soumises à l'influence des forces extérieures non gravitationnelles.

§ 1.2 Quantités physiquement observables

Dans cette section sont introduits les éléments de l'appareil mathématique de Zelmanov relatifs aux invariants chronométriques.

Pour déterminer quelles composantes d'une quantité quadridimensionnelle peuvent être physiquement observables, nous allons considérer un référentiel réel auquel est attaché un observateur physique. A cet observateur physique qui est son propre référentiel, est intimement associé un *réseau de coordonnées* auquel est rattaché une *horloge physique*. Le référentiel considéré étant un *corps physique*, possède donc un champ gravitationnel, et peut entrer en rotation ou déformation rendant l'espace immédiat inhomogène et anisotrope. De fait, le corps de référence et son espace associé peuvent être considérés comme un ensemble de références physiques réelles, dans lequel l'observateur compare le résultat de ses mesures. Par conséquent, les quantités physiquement

observables s'obtiendront en projetant les quantités quadridimensionnelles sur des lignes de temps et sur le 3-espace du corps physique de l'observateur.

D'un point de vue géométrique, le 3-espace de l'observateur est la *section spatiale* $x^0 = ct = conste$. En chaque point de l'espace-temps, une section spatiale (espace local), peut être orthogonale à la *ligne de temps*. Assimilons l'espace-temps qui contient cet espace local à une courbe enveloppante qui sera donc une section spatiale partout orthogonale aux lignes de temps. Un tel espace-temps (global) est appelé un *espace holonome*. Si aucune courbe enveloppante d'espace-temps n'existe, les sections spatiales ne seront que localement orthogonales aux lignes de temps, et dans ce cas l'espace-temps est dit généralement *non holonome*.

Nous supposons que l'observateur est au repos par rapport à ses références physiques (corps de référence). Le référentiel d'un tel observateur accompagne le corps physique dans tout déplacement, et donc ce système sera appelé le *référentiel d'accompagnement*. Chaque réseau de coordonnées au repos par rapport au corps de référence est relié à un autre réseau, par les relations

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0\left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right) \\ &\tilde{x}^i = \tilde{x}^i\left(x^1,\, x^2,\, x^3\right), \qquad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.13}$$

où la dernière équation implique que les coordonnées spatiales du système tildé sont indépendantes du temps dans le système non tildé, ce qui revient à établir un réseau de coordonnées correspondant à des lignes de temps fixes $x^i = conste$, en chaque point de ce réseau. La transformation des coordonnées spatiales n'est rien d'autre que la transition d'un réseau de coordonnées vers un autre point de ce réseau, et ce, dans la même section d'espace. La transformation du temps implique le changement de l'ensemble des horloges, et donc une transition vers une section d'espace distincte (c'est-à-dire un autre 3-référentiel). Pratiquement cela revient à substituer au corps réel de référence et tous ses attributs physiques, à un autre corps (ou système) auquel sont rattachés d'autres caractéristiques physiques. En utilisant donc des références distinctes, l'observateur obtiendra des résultats de mesure différents (quantités observables différentes). Par conséquent, les grandeurs physiquement observables doivent être invariantes par rapport à la transformation du temps, c'est-à-dire qu'elles deviennent des *quantité chronologiquement invariantes* ou plus précisément *chronométriquement invariantes*.

Du fait que les transformations (1.13) définissent un ensemble de lignes de temps fixes, les invariants chronométriques (quantités physiquement observables) sont ces quantités qui sont invariantes par rapport à ces transformations.

Dans les faits, formuler la mesure de grandeurs physiquement observables dans le référentiel d'accompagnement de l'observateur physique exige de calculer les projections chronométriquement invariantes de quantités quadridimensionnelles sur les lignes de temps, et sur la section spatiale de son corps, système physique de référence. Ce processus doit s'effectuer à l'aide de propriétés chronométriquement invariantes exploitées dans son espace de référence.

Pour *projeter* des quantités quadridimensionnelles, nous utiliserons des opérateurs caractérisant les propriétés de l'espace de référence de l'observateur. L'opérateur de projection sur la ligne de temps est un 4-vecteur unité b^α, qui représente la 4-vitesse de l'observateur par rapport à son corps physique de référence

$$b^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \tag{1.14}$$

et qui est partout tangent à la ligne d'univers de cet observateur. Chaque référentiel pouvant être décrit par son propre 4-vecteur unité b^α, appelé par Zelmanov *vecteur monade*. L'opérateur de projection sur la section spatiale est lui défini par le 4-tenseur symétrique

$$\left.\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= -\,g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta \\ h^{\alpha\beta} &= -\,g^{\alpha\beta} + b^\alpha b^\beta \end{aligned}\right\}, \tag{1.15}$$

dont les composantes mixtes sont

$$h^\beta_\alpha = -\,g^\beta_\alpha + b_\alpha b^\beta \tag{1.16}$$

(comme démontré [9], le vecteur b^α et le tenseur $h_{\alpha\beta}$ possèdent tout deux les propriétés des opérateurs de projections ordinaires, notamment $b_\alpha b^\alpha = 1$ et $h^\beta_\alpha b^\alpha = 0$). La projection d'une quantité tensorielle sur la ligne de temps est le résultat de sa contraction avec le vecteur monade b^α. De la même façon, la projection sur la section spatiale résulte de sa contraction avec le tenseur $h_{\alpha\beta}$.

La 3-vitesse spatiale de l'observateur rapportée à son corps physique de référence dans le référentiel d'accompagnement est évidemment zéro : $b^i = 0$. Les autres composantes de b^i qui subsistent sont

$$b^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad b_0 = g_{0\alpha} b^\alpha = \sqrt{g_{00}}\,, \quad b_i = g_{i\alpha} b^\alpha = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}\,. \tag{1.17}$$

Dans le référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$), les composantes du tenseur de projection sur la section d'espace sont

$$\left.\begin{array}{lll} h_{00} = 0\,, & h^{00} = -g^{00} + \dfrac{1}{g_{00}}\,, & h^0_0 = 0 \\ h_{0i} = 0\,, & h^{0i} = -g^{0i}, & h^i_0 = \delta^i_0 = 0 \\ h_{i0} = 0\,, & h^{i0} = -g^{i0}, & h^0_i = \dfrac{g_{i0}}{g_{00}} \\ h_{ik} = -g_{ik} + \dfrac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\,, & h^{ik} = -g^{ik}, & h^i_k = -g^i_k = \delta^i_k \end{array}\right\}. \quad (1.18)$$

Le tenseur $h_{\alpha\beta}$ dans le 3-espace du référentiel d'accompagnement de l'observateur possède toutes les propriétés du tenseur métrique fondamental

$$h^i_\alpha h^\alpha_k = \delta^i_k - b_k b^i = \delta^i_k\,, \qquad \delta^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

où δ^i_k est le 3-tenseur unité*. Pour cette raison, dans le référentiel d'accompagnement le 3-tenseur chr.inv. h_{ik} permet d'abaisser et d'élever les indices de toutes les quantités chr.inv.

Les projections d'un 4-vecteur arbitraire Q^α sur les lignes de temps et celles sur les sections spatiales dans le référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$) sont données par

$$T = b^\alpha Q_\alpha = b^0 Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad (1.20)$$

$$L^0 = h^0_\beta Q^\beta = -\frac{g_{0k}}{g_{00}}\,Q^k, \quad L^i = h^i_\beta Q^\beta = \delta^i_k Q^k = Q^k. \quad (1.21)$$

Les projections d'un tenseur arbitraire du 2ème rang $Q^{\alpha\beta}$ sont

$$T = b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = b^0 b^0 Q_{00} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}\,, \quad (1.22)$$

$$L^{00} = h^0_\alpha h^0_\beta Q^{\alpha\beta} = -\frac{g_{0i}g_{0k}}{g^2_{00}}\,Q^{ik}, \quad L^{ik} = h^i_\alpha h^k_\beta Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}. \quad (1.23)$$

Une fois vérifiées les quantités obtenues par les transformations (1.13), nous voyons que les quantités chronométriquement invariantes

*Le tenseur δ^i_k est la partie tridimensionnelle du 4-tenseur unité δ^α_β qui peut être utilisé pour remplacer les indices quadridimensionnels.

(observables physiques) sont la projection sur les lignes de temps et les composantes spatiales de la projection sur les sections d'espace.

Nous appellerons les quantités observables les *projections chr.inv.*, d'où en projetant les 4 coordonnées x^α dans le référentiel d'accompagnement, on obtient l'invariant chr.inv. du *temps physiquement observable*

$$\tau = \sqrt{g_{00}}\, t + \frac{g_{0i}}{c\sqrt{g_{00}}}\, x^i, \tag{1.24}$$

et le vecteur chr.inv. des *coordonnées physiquement observables* qui coïncident avec les coordonnées spatiales x^i. De la même façon, la projection d'un 4-intervalle élémentaire dx^α, fournit un intervalle élémentaire de temps physiquement observable qui est l'invariant chr.inv.

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0i}}{c\sqrt{g_{00}}}\, dx^i, \tag{1.25}$$

ainsi que le vecteur chr.inv. d'un intervalle élémentaire de coordonnées physiquement observables dx^i. On en déduit la *vitesse physiquement observable* d'une particule qui est le 3-vecteur chr.inv.

$$\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}\,, \tag{1.26}$$

qui diffère de la vitesse de coordonnées $u^i = \frac{dx^i}{dt}$.

En projetant le tenseur métrique fondamental, nous en déduisons que h_{ik} est le *tenseur métrique chr.inv.*, autrement dit, c'est le tenseur métrique observable dans le référentiel d'accompagnement

$$h^i_\alpha h^k_\beta\, g^{\alpha\beta} = g^{ik} = -\,h^{ik}, \qquad h^\alpha_i h^\beta_k g_{\alpha\beta} = g_{ik} - b_i b_k = -\,h_{ik}\,, \tag{1.27a}$$

dont les composantes sont (1.27b)

$$h_{ik} = -\,g_{ik} + b_i b_k\,, \quad h^{ik} = -\,g^{ik}, \quad h^i_k = -\,g^i_k = \delta^i_k\,. \tag{1.27b}$$

Donc, le carré d'un intervalle spatial observable $d\sigma$ est

$$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k. \tag{1.28}$$

L'intervalle d'espace-temps formulé à l'aide des quantités physiquement observables sera obtenu en substituant $g_{\alpha\beta}$ de (1.15), c'est-à-dire

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \tag{1.29}$$

En dehors de leurs projections sur les lignes de temps et sur les sections spatiales, les quantités quadridimensionnelles de deuxième rang

et plus, ont aussi des composantes mixtes. Comment définir alors des quantités physiquement observables si elles existent ? La meilleure approche consiste à développer une méthode générale (due à Zelmanov) qui doit nous permettre de calculer ces quantités exclusivement à partir de leurs propriétés d'invariance chronométrique :

Théorème de Zelmanov

On considère que $Q^{ik\ldots p}_{00\ldots 0}$ sont les composantes d'un tenseur quadridimensionnel $Q^{\mu\nu\ldots\rho}_{00\ldots 0}$ de rang r, avec les indices supérieurs non nuls, tandis que : les indices inférieurs m sont tous nuls. Les quantités tensorielles

$$T^{ik\ldots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}}\, Q^{ik\ldots p}_{00\ldots 0} \tag{1.30}$$

forment un 3-tenseur contravariant chr.inv. de rang $(r-m)$. Il en découle que le tenseur $T^{ik\ldots p}$ représente une projection m-multiple sur les lignes de temps par l'intermédiaire des indices $\alpha, \beta \ldots \sigma$, ainsi qu'une projection sur les section spatiales par l'intermédiaire des $(r-m)$ indices $\mu, \nu \ldots \rho$, du tenseur initial $Q^{\mu\nu\ldots\rho}_{\alpha\beta\ldots\sigma}$.

Une conséquence immédiate de ce théorème est que pour tout vecteur Q^α, deux des grandeurs déduites plus haut, sont des observables physiques

$$b^\alpha Q_\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i. \tag{1.31}$$

Pour tout tenseur symétrique du 2ème rang $Q^{\alpha\beta}$, trois quantités sont des observables physiques, à savoir

$$b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}\,, \quad h^{i\alpha} b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q^i_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad h^i_\alpha h^k_\beta Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}, \tag{1.32}$$

et dans le cas d'un tenseur antisymétrique du 2ème rang, la première quantité est nulle car $Q_{00} = Q^{00} = 0$.

Les quantités physiquement observables (projections chr.inv.) doivent être comparées aux systèmes de référence de l'observateur — propriétés des observables de cet espace de référence qui sont donc propres à chaque corps physique considéré.

Nous allons donc considérer les propriétés élémentaires de ce référentiel d'accompagnement dans lequel les équations finales de la théorie doivent être formulées.

Les propriétés physiquement observables du référentiel d'accompagnement peuvent être définies à l'aide des opérateurs de dérivation chr.inv. par rapport au temps et aux coordonnées spatiales. Ces types

d'opérateurs ont été introduits par Zelmanov [9] comme suit

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^0}\,. \tag{1.33}$$

Ces opérateurs anticommutent, c'est-à-dire que la différence de leurs dérivées secondes est non nulle

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i\,\partial t} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial t\,\partial x^i} = \frac{1}{c^2}\,F_i\,\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,, \tag{1.34}$$

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2}{c^2}\,A_{ik}\,\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,. \tag{1.35}$$

Ici A_{ik} est le *tenseur antisymétrique chr.inv. représentant la vitesse angulaire de rotation spatiale*

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k - F_k v_i\right), \tag{1.36}$$

où v_i est la vitesse tangentielle de cette rotation

$$\left.\begin{aligned} v_i &= -\,c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad & v^i &= -\,c\,g^{0i}\sqrt{g_{00}} \\ v_i &= h_{ik}v^k, & v^2 &= v_k v^k = h_{ik}\,v^i v^k \end{aligned}\right\}. \tag{1.37}$$

Le tenseur satisfaisant $A_{ik} = 0$ traduit la condition dite "d'holonomicité" de cet espace [9]. Dans ce cas, $g_{0i} = 0$, et $v_i = 0$. Le tenseur A_{ik} est de ce fait également appelé le *tenseur de non-holonomicité**.

Il en résulte que F_i est le *3-vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle*

$$F_i = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t}\right), \tag{1.38}$$

où w est le potentiel de gravitation

$$\mathrm{w} = c^2\,(1 - \sqrt{g_{00}}\,)\,, \tag{1.38a}$$

à l'origine duquel se trouve localisé le champ gravitationnel du système de référence de l'observateur (corps physique)†. A l'approximation quasi-

*L'espace-temps de la relativité restreinte (espace de Minkowski) rapporté à un référentiel galiléen ainsi que d'autres cas de figure de la relativité générale sont des exemples d'espace holonome $A_{ik} = 0$.

†Les quantités w et v_i ne sont pas douées d'invariance chronométrique, alors que le vecteur de la force d'inertie gravitationnelle et le tenseur de vitesse angulaire de rotation spatiale qui s'en déduisent, sont des quantités chr.inv.

newtonienne, c'est-à-dire dans un champ gravitationnel faible, pour des vitesses inférieures à celle de la lumière et en l'absence de rotations spatiales, F_i se réduit à une force gravitationnelle non relativiste

$$F_i = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} \,. \tag{1.39}$$

Le système de référence de l'observateur est un système physique réel, et son réseau de coordonnées associé peut faire l'objet de déformation et avec lui son espace de référence physique. Par conséquent, pour les référentiels physiques réels, il faut prendre en compte ses déformations spatiales éventuelles. Il en découle que la métrique observable h_{ik} de l'espace de référence doit être instationnaire. Pour rendre compte de cette conséquence, on introduit alors le *tenseur symétrique tridimensionnel chr.inv. du taux de déformation spatiale*

$$\left.\begin{aligned} & D_{ik} = \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t}\,, \qquad D^{ik} = -\frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h^{ik}}{\partial t} \\ & D = h^{ik} D_{ik} = D^n_n = \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t} \\ & h = \det \|h_{ik}\| \end{aligned}\right\} . \tag{1.40}$$

A l'aide des définitions ainsi données, on peut généralement formuler n'importe quel attribut inhérent à un objet géométrique situé dans un espace et dans lequel sont définis des paramètres observables. A titre d'exemple, on sait que les symboles de Christoffel apparaissant dans les équations du mouvement ne sont pas des tenseurs [18]. Néanmoins, ceux-ci peuvent être formulés à l'aide de quantités physiquement observables. Les formules obtenues par Zelmanov [9] sont

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_k F^k\right], \tag{1.41}$$

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k, \tag{1.42}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_k\left(D^k_i + A^{\cdot k}_{i\cdot} + \frac{1}{c^2}\, v_i F^k\right)\right], \tag{1.43}$$

$$\Gamma^k_{0i} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D^k_i + A^{\cdot k}_{i\cdot} + \frac{1}{c^2}\, v_i F^k\right), \tag{1.44}$$

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{c\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\left\{-D_{ij} + \frac{1}{c^2}\,v_n \times \right.$$
$$\times\left[v_j\left(D^n_i + A^{\cdot n}_{i\cdot}\right) + v_i\left(D^n_j + A^{\cdot n}_{j\cdot}\right) + \frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^n\right] + \tag{1.45}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2c^2}\left(F_i\,v_j + F_j\,v_i\right) - \Delta^n_{ij}\,v_n\right\},$$

$$\Gamma^k_{ij} = \Delta^k_{ij} - \frac{1}{c^2}\left[v_i\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right) + v_j\left(D^k_i + A^{\cdot k}_{i\cdot}\right) + \frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^k\right], \tag{1.46}$$

où les Δ^k_{ij} sont les *symboles de Christoffel chr.inv.* qui sont définis comme les symboles de Christoffel classiques (1.2), mais construits à partir du tenseur métrique h_{ik} et des opérateurs de dérivation chr.inv.

$$\Delta^i_{jk} = h^{im}\Delta_{jk,m} = \frac{1}{2}\,h^{im}\left(\frac{{}^*\partial h_{jm}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial h_{jk}}{\partial x^m}\right). \tag{1.47}$$

Nous avons donc discuté des bases fondamentales de l'appareil mathématique des invariants chronométriques.

A présent, il nous est possible d'exprimer n'importe quelle équation généralement covariante, à travers leurs projections chr.inv. sur la ligne de temps et sur la section spatiale associée à un corps physique de référence quelconque, en les formulant à l'aide de leurs propriétés physiquement observables réelles. Ce faisant, nous serons parvenus à des équations qui ne contiennent que des quantités objectivement mesurables.

Bien évidemment, la première application possible de cet appareil mathématique qui vient à l'esprit est la déduction des équations du mouvement chr.inv. pour des particules libres et l'étude des résultats qui en découlent. Les solutions particulières de ce problème ont été trouvées par Zelmanov [9]. Au prochain paragraphe §1.3, nous allons concentrer notre attention sur les solutions générales du problème.

§ 1.3 Equations dynamiques des particules libres

La dérivée absolue d'un vecteur quadridimensionnel attaché à une particule par rapport à un paramètre scalaire non nul le long de sa trajectoire, s'exprime par le 4-vecteur

$$N^\alpha = \frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}Q^\mu\,\frac{dx^\nu}{d\rho}\,, \tag{1.48}$$

dont les projections chr.inv. sont définies comme toutes les projections d'un 4-vecteur quelconque (1.31)

$$\frac{N_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g_{0\alpha} N^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(g_{00} N^0 + g_{0i} N^i \right), \tag{1.49}$$

$$N^i = h^i_\beta N^\beta = h^i_0 N^0 + h^i_k N^k. \tag{1.50}$$

D'un point de vue géométrique, celles-ci représentent la projection du vecteur N^α sur la ligne de temps et la projection des composantes spatiales sur la section spatiale dans le référentiel d'accompagnement.

Donc, en projetant les équations du mouvement des particules massives (1.10) et sans masse (1.12), on obtient les équations dynamiques chr.inv. Pour une particule massive les équations sont

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i \mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k = 0\,, \tag{1.51}$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + 2m \left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot} \right) \mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk} \mathrm{v}^n \mathrm{v}^k = 0\,, \tag{1.52}$$

alors que pour les particules sans masse

$$\frac{dk}{d\tau} - \frac{k}{c^2} F_i c^i + \frac{k}{c^2} D_{ik} c^i c^k = 0\,, \tag{1.53}$$

$$\frac{d\left(kc^i\right)}{d\tau} + 2k \left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot} \right) c^k - kF^i + k\Delta^i_{nk} c^n c^k = 0\,, \tag{1.54}$$

où m est la masse relativiste de la particule, $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde attaché de la particule sans masse et c^i est le vecteur tridimensionnel chr.inv. de la vitesse de la lumière. Il est facile de voir que contrairement aux équations dynamiques covariantes (1.10, 1.12), les équations chr.inv. ont un paramètre de dérivation unique pour les deux types de particules. Ce paramètre universel est le temps physiquement observable τ.

Ces équations chr.inv. ont été obtenues pour la première fois par Zelmanov [9].

Ainsi que nous l'avons démontré dans notre étude [19], les équations qui incluent la fonction du temps $\frac{dt}{d\tau}$ sont strictement positives, donc le temps physique est bien caractérisé par un écoulement direct $d\tau > 0$.

L'écoulement de la coordonnée temporelle dt révèle une variation de la coordonnée temporelle de la particule $x^0 = ct$ par rapport à l'horloge de l'observateur. De ce fait, le signe de la fonction du temps indique le sens du mouvement de la particule par rapport à l'observateur.

La fonction du temps $\frac{dt}{d\tau}$ se détermine de façon que le carré de la 4-vitesse de la particule demeure inchangé le long de sa ligne d'univers $u_\alpha u^\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = conste$. Les équations en $\frac{dt}{d\tau}$ sont communes aux particules massives subluminiques, supraluminiques ainsi qu'aux particules dépourvues de masse. Ces équations ont deux solutions qui sont données ici par la formule commune

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{1,2} = \frac{v_i \mathrm{v}^i \pm c^2}{c^2\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)} \,. \tag{1.55}$$

Ainsi qu'il a été montré dans notre étude [19], le temps est caractérisé par un écoulement direct si $v_i \mathrm{v}^i \pm c^2 > 0$, inverse si $v_i \mathrm{v}^i \pm c^2 < 0$, et cet écoulement s'arrête si $v_i \mathrm{v}^i \pm c^2 = 0$. Par conséquent il existe toute une série de solutions pour chaque type de particules et de directions lorsqu'elles se déplacent dans le temps par rapport à l'observateur. Par exemple, la masse d'une particule (massive)* $\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m$ est positive si celle-ci voyage vers le futur, et négative si elle voyage vers le passé.

Il en résulte que pour une particule massive libre voyageant vers le passé, on obtient les équations dynamiques chr.inv.

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i \mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k = 0 \,, \tag{1.56}$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + mF^i + m\Delta^i_{nk} \mathrm{v}^n \mathrm{v}^k = 0 \,. \tag{1.57}$$

Tandis que pour une particule dépourvue de masse, nous avons

$$-\frac{dk}{d\tau} - \frac{k}{c^2} F_i c^i + \frac{k}{c^2} D_{ik} c^i c^k = 0 \,, \tag{1.58}$$

$$\frac{d\left(kc^i\right)}{d\tau} + kF^i + k\Delta^i_{nk} c^n c^k = 0 \,. \tag{1.59}$$

Par rapport à une particule massive subliminique, les équations du mouvement chr.inv. des particules massives supraluminiques sont similaires mais la masse doit être ici multipliée par l'unité imaginaire i.

Comme, il est aisé de voir, les équations du mouvement chr.inv. vers le futur et vers le passé ne sont pas symétriques en raison de conditions physiques distinctes relatives à l'écoulement direct et inverse du temps, d'où une absence de certains termes dans les équations.

*La masse relativiste d'une particule est la projection de son vecteur quadridimensionnel sur la ligne de temps de l'observateur.

En outre, le mouvement des particules massives et non massives a été considéré sous l'aspect onde-particule en supposant que leur propagation possède le caractère ondulatoire de l'approximation de l'optique géométrique [19]. Il est bien connu que dans le cadre onde-particule, le vecteur dynamique d'une particule sans masse est [10]

$$K_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.60}$$

où ψ est la phase de l'onde (eikonale).

De la même façon, nous introduirons le vecteur dynamique pour une particule massive

$$P_\alpha = \frac{\hbar}{c}\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.61}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck. L'équation de la phase de l'onde (équation d'eikonale) à l'approximation géométrique est donnée par la condition $K_\alpha K^\alpha = 0$. Par conséquent, l'équation d'eikonale chr.inv. pour la particule sans masse s'écrit

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0\,, \tag{1.62}$$

et pour la particule massive

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\,. \tag{1.63}$$

Substituant la forme ondulatoire du vecteur dynamique dans les équations covariantes du mouvement (1.10, 1,12), après leur projection dans le référentiel d'accompagnement, on obtient les équations du mouvement chr.inv. sous forme "ondulatoire". Pour les particules massives, les équation résultantes sont

$$\pm\frac{d}{d\tau}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right) + F^i\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i} - D^i_k\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i} = 0\,, \tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\right) - \left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\left(\pm\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{v}^k - h^{km}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^m}\right) \pm \\ \pm\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,F^i + h^{mn}\Delta^i_{mk}\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^n} = 0\,.\end{aligned} \tag{1.65}$$

Le signe $\pm$ devant les termes écrits est explicité comme suit : le signe "plus" se rapporte au mouvement de la particule orienté du passé vers le futur (écoulement du temps direct), alors que le signe "moins"

représente le mouvement rétrograde (écoulement du temps inverse). Il est digne d'intérêt de remarquer que contrairement à la forme corpusculaire des équations dynamiques chr.inv., (1.51, 1.52) et (1.56, 1.57), les équations "ondulatoires" (1.64, 1.65) sont symétriques par rapport à la direction temporelle du mouvement. Pour les particules sans masse, les équations dynamiques ondulatoires chr.inv. (1.64, 1.65) ne révèlent qu'une différence : au lieu de la vitesse chr.inv. v^i de la particule, les équations contiennent le vecteur chr.inv. c^i de la vitesse de la lumière.

Le fait que les équations corpusculaires du mouvement dans le passé et vers le futur soient asymétriques, conduit à la conclusion évidente que dans l'espace pseudo-riemannien inhomogène de la relativité générale, pré-existe une asymétrie fondamentale des directions du temps. Si l'on essaie de comprendre le sens physique de cette asymétrie fondamentale, on est amené à introduire le *principe du miroir*, ou en d'autres termes, — *l'effet observable de l'Univers miroir* [19].

Dans l'espace-temps quadridimensionnel, imaginons un *miroir* identifié à la section spatiale, qui sépare donc le passé du futur. Alors, les particules et les ondes se déplaçant du passé vers le futur (masses relativistes et fréquences positives) rencontrent le miroir et rebondissent dans le temps vers le passé. Leurs propriétés prennent donc des valeurs numériques négatives. Inversement, les particules et les ondes se propageant dans le passé (masses relativistes et fréquences négatives) rebondissent du miroir attribuant des valeurs numériques négatives à leurs propriétés et commencent à se déplacer vers le futur. Lorsqu'elle est réfléchie par le miroir, la quantité $\frac{{}^*\partial\psi}{dt}$ change de signe, et donc les équations de propagation d'une onde vers le futur deviennent des équations de propagation de cette onde vers le passé (et vice versa). De façon remarquable, lorsqu'elles sont réfléchies par le miroir, les équations d'onde chr.inv. se *transforment complètement* l'une dans l'autre sans contraction ni addition de termes supplémentaires. Autrement dit, la forme ondulatoire de la matière subit une réflexion totale de la part du miroir. Au contraire, les équations corpusculaires du mouvement chr.inv. *ne se transforment pas complètement* dans la réflexion du miroir. Les composantes spatiales des équations pour les particules avec ou sans masse possèdent un terme supplémentaire

$$2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k, \qquad 2k\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k, \tag{1.66}$$

qui n'apparaît pas dans les équations du mouvement futur-passé. Les équations du mouvement vers le passé gagnent un terme nouveau dans la réflexion. Inversement, les équations du mouvement vers le futur perdent ce terme lorsque la particule impacte le miroir. Cela implique que dans le

cas d'une particule matérielle (équations corpusculaires), ou celui de la propagation d'une onde (équations d'onde), nous sommes en présence d'une situation qui ne représente pas simplement un "rebond" dû au miroir, mais plutôt un "passage" à travers ce miroir vers un autre monde — un *monde au-delà du miroir*.

Dans cet *Univers miroir*, toutes les particules possèdent des masses ou fréquences négatives, d'où il découle qu'elles voyagent (de notre point de vue), du futur vers le passé. L'aspect ondulatoire de la matière issu de notre Univers ne perturbe pas les évènements du monde miroir et réciproquement, la matière ondulatoire de ce dernier n'affecte pas les évènements de notre Univers. Par contre, la forme corpusculaire de la matière (particules) de notre Univers peut produire des effets significatifs sur les évènements de l'Univers miroir dont les particules massives peuvent à leur tour avoir certains impacts sur ceux de notre monde. Ce dernier est totalement isolé du monde miroir (absence d'effets mutuels entre les particules des deux univers), d'après la condition évidente $D^i_k \mathrm{v}^k = -A^{\cdot i}_{k\cdot} \mathrm{v}^k$ selon laquelle on voit que le terme supplémentaire dans les équations corpusculaires chr.inv. est égal à zéro. Cette circonstance est également vérifiée lorsque $D^i_k = 0$ et $A^{\cdot i}_{k\cdot} = 0$, c'est-à-dire en l'absence de déformation et rotation dans l'espace.

Jusqu'à présent, nous avions considéré le mouvement de particules le long de trajectoires non isotropes où $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 > 0$, et isotropes (du genre lumière) où $ds^2 = 0$ et $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 \neq 0$. Par ailleurs, nous avions considéré les trajectoires de 3ème espèce [19], qui en dehors de $ds^2 = 0$, satisfont aux conditions plus restrictives $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 = 0$

$$d\tau = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)\right] dt = 0\,, \tag{1.67}$$

$$d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k = 0\,. \tag{1.68}$$

Nous appellerons ces trajectoires dégénérées *trajectoires nulles*, car pour un observateur régulier subluminique, tout intervalle de temps et intervalle spatial observable est nul le long de ces trajectoires. Le long de ces trajectoires nulles, on peut également montrer que le déterminant du tenseur métrique fondamental est nul $g = 0$. De part la définition des espaces riemanniens, on a $g < 0$, et la métrique est strictement non dégénérée. Si maintenant la métrique est dégénérée, l'espace sera dit *espace nul* (*zéro-espace*). De la même façon, les particules qui suivent les lignes d'un tel espace, seront appelées *particules nulles* (*zéro-particules*).

En fait, les formules (1.67, 1.68) révèlent les conditions physiques qui déterminent la dégénérescence totale de l'espace-temps quadridimen-

sionnel. Nous pouvons réécrire les *conditions physiques de la dégénérescence* comme suit

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \tag{1.69}$$

$$g_{ik}\, u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 . \tag{1.70}$$

Corrélativement, la formule pour la masse d'une particule nulle M qui tient compte des conditions de dégénérescence diffère de la masse relativiste m d'une particule ordinaire située dans un domaine non dégénéré

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)} , \tag{1.71}$$

qui se trouve être un rapport non nul entre deux grandeurs et qui sont elles chacune égale à zéro dans le cas d'une métrique dégénérée*.

Le vecteur dynamique d'une particule nulle s'exprime sous forme corpusculaire et ondulatoire par

$$P^\alpha = \frac{M}{c}\frac{dx^\alpha}{dt} , \qquad P_\alpha = \frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} . \tag{1.72}$$

Dans l'espace nul, les équations dynamiques du mouvement chr.inv. sous forme corpusculaire prennent la forme

$$M D_{ik}\, u^i u^k = 0 , \tag{1.73}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M u^i\right) + M \Delta^i_{nk}\, u^n u^k = 0 , \tag{1.74}$$

alors que sous forme ondulatoire, ces équations sont

$$D^m_k\, u^k \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^m} = 0 , \tag{1.75}$$

$$\frac{d}{dt}\left(h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\right) + h^{mn}\Delta^i_{mk}\, u^k \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^n} = 0 . \tag{1.76}$$

L'équation d'eikonale chr.inv. pour la particule nulle est

$$h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0 , \tag{1.77}$$

c'est-à-dire que c'est une équation d'onde stationnaire qui décrit la particule nulle sous la forme d'une zone d'information. Par conséquent du

*Cette circonstance est similaire au cas des particules sans masse, car quand $\mathrm{v}^2 = c^2$, $m_0 = 0$, et $\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2} = 0$, mais leur rapport $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}} \neq 0$.

point de vue d'un observateur subluminique ordinaire, l'ensemble de l'espace nul contient un système de d'ondes stationnaires du genre lumière (particules nulles) — un *hologramme stationnaire du genre temps.* En outre, dans cet espace nul, le temps observable a la même valeur numérique pour n'importe quelle paire d'évènements (1.67). Du point de vue d'un observateur ordinaire, cela implique que la vitesse d'une particule nulle est infinie ; ce qui signifie que ces particules nulles peuvent transmettre instantanément une information d'un point à l'autre de notre Univers régulier, réalisant ainsi *l'action de longue portée* [19].

§ 1.4 Mouvement non géodésique des particules. Position du problème

Il est bien connu que le mouvement libre d'une particule (le long de sa propre ligne géodésique) se traduit par l'annulation de la dérivée absolue de son vecteur d'univers dynamique (4-impulsion), d'où il découle que le carré de ce vecteur demeure inchangé le long de la trajectoire. Autrement dit, le vecteur est parallèlement transporté au sens de Levi-Civita.

Dans le mouvement non géodésique d'une particule liée, la dérivée absolue de sa 4-impulsion n'est plus nulle, mais la dérivée absolue de la somme de sa 4-impulsion P^α est égale à zéro. De même, la dérivée absolue d'une 4-impulsion L^α supplémentaire communiquée à la particule interagissant avec un champ extérieur et qui dévie de sa géodésique, est aussi égale à zéro. La superposition de plusieurs vecteurs peut être soumise au transport parallèle [18] et donc, la formulation d'équations non géodésiques requiert d'abord une définition des champs perturbateurs non gravitationnels.

Naturellement, le champ extérieur interagissant avec la particule pour la dévier se sa géodésique, doit avoir les mêmes propriétés physiques que cette particule. A ce jour, nous ne connaissons que 3 propriétés fondamentales et indépendantes qui caractérisent une particule : la *masse*, la *charge électrique* et le *spin.* Si les deux premières sont parfaitement établies, le spin d'un électron mis en évidence par les expériences de Stern et Gerlach (1921) fût interprété plus tard par Goudsmit et Uhlenbeck (1925) comme représentant une rotation intrinsèque de la particule. De nombreuses expériences ultérieures, en particulier celles conduites sur d'autres particules élémentaires, démontrèrent l'inexactitude de la description d'un petit gyroscope tournant. Le spin s'avéra être une propriété fondamentale des particules au même titre que la masse ou la charge, en dépit de ses dimensions de moment angulaire

propre, et de son comportement de rotation intrinsèque manifesté lors des interactions.

D'un autre côté, ces champs gravitationnels reçurent une interprétation géométrique par l'intermédiaire des équations d'Einstein. Dans la théorie des invariants chronométriques, la force de gravitation et le potentiel (1.38) s'obtiennent comme fonctions seules des propriétés géométriques de l'espace lui-même. Par conséquent, le mouvement d'une particule dans un espace pseudo-riemannien est considéré comme son mouvement dans un champ de gravitation.

Néanmoins, il est impossible de savoir si la force électromagnétique de Lorentz et le potentiel du champ électromagnétique peuvent s'exprimer à l'aide des propriétés géométriques de l'espace. Donc à ce jour, les champs électromagnétiques n'ont reçu aucune interprétation géométrique : un tel champ est toujours introduit dans l'espace pseudo-riemannien en tant que champ tensoriel extérieur (le champ du tenseur de Maxwell). Actuellement, les équations principales de la théorie des champs électromagnétiques ont pu être déduites sous forme covariante*. Selon cette théorie, une particule chargée est soumise à une 4-impulsion $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ de la part d'un champ électromagnétique où A^α est le 4-potentiel et e la charge électrique [10, 20]. Ajoutant cette impulsion supplémentaire à la 4-impulsion spécifique de la particule, et en appliquant le déplacement parallèle de Levi-Civita on obtient les équations covariantes du mouvement de la particule dans l'espace contenant les champs gravitationnels et électromagnétiques.

Le cas des particules à spin est éminemment plus compliqué. Pour déduire l'impulsion particulière communiquée à une particule due à son spin, il nous faut définir le champ extérieur qui interagit avec le spin considéré ici comme une propriété fondamentale de la particule. Initialement, le problème a été traité à l'aide des seuls outils de la mécanique quantique (Equations de Dirac, 1928). Les premières tentatives de géométrisation de ce problème en relativité générale ont été entreprises par Papapetrou, et Corinaldesi [21, 22]. Leur approche reposait sur la vision générale des particules considérées comme monopoles et dipôles matériels. Dans cette interprétation, une particule massive est un *monopole mécanique*. Si une particule peut être assimilée à un système de deux masses en rotation autour d'un centre de gravité commun, alors cette particule constitue un *dipôle mécanique*. Procédant de l'assimilation d'une particule à spin à un gyroscope tournant, on peut

*Malgré ce fait positif, le calcul complexe du tenseur d'énergie-impulsion du champ éléctromagnétique s'introduit en relativité générale toujours à partir de cas particuliers ou dans l'espace-temps de la relativité restreinte.

alors la considérer comme un dipôle mécanique dont le centre de gravité se situe à la surface de celle-ci. Papapetrou et Corinaldesi considérèrent le mouvement d'un tel dipôle dans un espace pseudo-riemannien dans le cadre de la métrique de Schwarzchild, — un cas très particulier où la rotation d'espace est nulle et la métrique est stationnaire (le tenseur des déformations d'espace est égal à zéro).

Nul doute que la méthode de Papapetrou soit digne d'intérêt, mais elle présente une difficulté majeure. Développée dans les années 40, cette approche repose sur le concept de particules gyroscopes en légère rotation ce qui ne correspond plus aux résultats expérimentaux de ces dernières décennies*.

Il existe une autre façon de résoudre le problème du mouvement des particules à spin. Dans les espaces riemanniens, le tenseur métrique fondamental est symétrique $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. On peut malgré tout, construire un espace dans lequel le tenseur métrique aura une forme arbitraire $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$ (de tels espaces ne possèdent plus la géométrie riemannienne). Le tenseur métrique comporte ainsi une partie antisymétrique†. Des termes supplémentaires apparaissent alors dans les symboles de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ et donc dans le tenseur de courbure correspondant $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Ces termes supplémentaires résultent de la circulation parallèle d'un vecteur le long d'un contour fermé qui ne revient pas à son point de départ initial, et donc la trajectoire est déformée dans une sorte de mouvement hélicoïdal. Dans un tel espace pourvu d'une torsion, la rotation-spin d'une particule peut être considérée comme un transport du vecteur de rotation le long de son contour, et qui engendre ainsi un champ local de cette torsion d'espace.

Néanmoins, ce type de théorie présente aussi d'autres inconvénients. En premier lieu, si $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$, les fonctions des composantes $g_{\alpha\beta}$ dont l'ordre des indices est différent, peuvent varier. De ce fait, le choix de ces fonctions a du être adapté de façon à définir un champ de torsion particulier ce qui restreint considérablement l'étendue des solutions possibles en réduisant les équations à des cas particuliers. En second lieu, cette théorie repose essentiellement sur l'assertion suivant laquelle la particule

*En fait, si l'on assimile l'électron à une boule de rayon $r_e = 2.8 \times 10^{-13}$ cm, cela implique que la vitesse linéaire de sa rotation à la surface est $u = \frac{\hbar}{2 m_0 r_e} = 2 \times 10^{11}$ cm/s, qui se trouverait alors être $\sim$70 fois la vitesse de la lumière. Aucune expérience n'a mis en évidence une telle vitesse pour les électrons.

†Généralement, dans chaque tenseur de 2ème rang ou plus, on peut distinguer une partie symétrique et une partie antisymétrique. Par exemple, dans le tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}\right) = S_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}$, on a la partie symétrique $S_{\alpha\beta}$, et la partie antisymétrique $N_{\alpha\beta}$. Cette dernière est nulle dans un espace riemannien.

rotation-spin est représentable par un champ de torsion local résultant du transport parallèle de son vecteur de rotation le long d'un contour. Encore une fois, cette affirmation implique d'envisager les particules spin-rotation comme des gyroscopes tournants et caractérisées par des rayons finis, (comme la méthode de Papapetrou), ce qui ne concorde plus avec les données expérimentales.

Malgré tout, dans le cadre de la relativité générale, on peut toujours adopter la représentation imagée où la particule spin-rotation reçoit une impulsion supplémentaire. Ajoutant celle-ci au vecteur spécifique de cette particule (effet gravitationnel), et en soumettant au transport parallèle, on peut obtenir les équations covariantes du mouvement de la particule*.

Une fois obtenues ces équations pour une particule à spin et une particule chargée, nous les projetterons sur une ligne de temps et sur la section spatiale dans le référentiel d'accompagnement, puis nous exprimerons leurs projections chr.inv. à l'aide des propriétés physiquement observables chr.inv. de l'espace de référence.

Par conséquent, le problème que nous nous efforcerons de résoudre dans cet ouvrage se décompose en plusieurs étapes. Le premier stade consiste à établir la théorie chr.inv. d'un champ électromagnétique dans l'espace pseudo-riemannien. En même temps, nous obtiendrons les équations du mouvement chr.inv. d'une particule chargée se déplaçant dans ce champ. Ce problème sera résolu au chapitre 3.

Nous établirons ensuite la théorie du mouvement d'une particule à spin en approchant ce problème de la manière la plus générale, et en supposant que le spin est une propriété fondamentale de la matière (comme la masse ou la charge). Au chapitre 4, une étude détaillée montrera que le champ non holonome de l'espace (le champ de rotations d'espace) interagit avec le spin d'une particule lui communiquant ainsi une impulsion supplémentaire.

Au cours du chapitre 5, nous analyserons les projections chr.inv. des équations d'Einstein. Partant, nous pourrons étudier les propriétés du vide physique, et leurs applications possibles en cosmologie.

Enfin, au chapitre 6, nous considérerons la théorie de l'Univers miroir et les conditions physiques de son accès au travers d'une membrane.

---

*Nous écrivions ceci vers le milieu des années 90, dans la première édition de ce livre. En 2007, une approche novatrice de la particule à spin a été développée par Suhendro [23, 24] sur l'hypothèse du spin comme rotationnel élémentaire de l'espace lui-même. Nous croyons que cette interprétation géométrique pure, est beaucoup plus proche des idées d'Einstein (géométrisation de la matière et des interactions), que celles que nous exposons sur la base des méthodes lagrangiennes, au chapitre 4.

Avant de tourner notre attention vers ces sujets, on se rapportera avec intérêt au chapitre 2 qui est consacré à l'algèbre tensorielle et à l'analyse, en termes de grandeurs physiquement observables (invariants chronométriques). La lecture de ce chapitre est fortement recommandée aux lecteurs qui sont susceptibles d'utiliser cet appareil mathématique dans le cadre de leurs propres recherches théoriques. Pour une compréhension plus générale de notre livre, cette partie peut être omise.

Chapitre 2 Algèbre tensorielle et analyse

§ 2.1 Tenseurs et algèbre tensorielle

Nous envisageons ici un espace (non nécessairement métrique) auquel est rapporté un système de référence arbitraire x^α. Dans un domaine donné de cet espace, il existe un objet G défini par n fonctions f_n des coordonnées x^α. Nous connaissons les règles de transformation permettant de calculer ces n fonctions dans un autre système $\tilde{x}^\alpha$ de cet espace. Supposons données les n fonctions f_n ainsi que la règle de transformation, alors G est un *objet géométrique* qui possède des composantes axiales x^α dans le système x^α, et des composantes $\tilde{f}_n\,(\tilde{x}^\alpha)$ dans tout autre sytème $\tilde{x}^\alpha$.

Nous définirons l'objet tensoriel (*tenseur*) de rang zéro φ, comme un objet géométrique se transformant selon la règle

$$\tilde{\varphi} = \varphi\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\alpha}\,, \tag{2.1}$$

où l'indice prend individuellement toutes les valeurs des indices des axes de coordonnées (une telle notation est également appelée *notation tensorielle*). Tout tenseur de rang zéro possède une composante unique et est appelé *scalaire*. Géométriquement, chaque scalaire peut être représenté par un point auquel est attribué un certain nombre.

En conséquence, un champ scalaire* est un ensemble de points de l'espace qui ont une propriété commune. Par exemple, une masse ponctuelle est un scalaire, tandis qu'une distribution massique (un gaz par exemple), forme un champ scalaire.

Les tenseurs contravariants du 1er rang A^α sont des objets géométriques munis d'indices et qui se transforment suivant la règle

$$\tilde{A}^\alpha = A^\mu\,\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.2}$$

Géométriquement, ces objets sont des vecteurs à n dimensions. Par exemple, le vecteur d'un déplacement élémentaire dx^α est un tenseur contravariant du 1er rang.

*Les notations algébriques pour un tenseur ou un champ tensoriel sont les mêmes. Le champ tensoriel est représenté par un tenseur en un point donné de l'espace, mais on considère que celui-ci est également présent en d'autres points du domaine de cet espace.

Les tenseurs contravariants de 2ème rang $A^{\alpha\beta}$ sont des objets géométriques dont les composantes se transforment suivant la loi

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = A^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \,. \tag{2.3}$$

Du point de vue géométrique un tel objet représente un parallélogramme construit à partir de deux vecteurs, ce que l'on traduit en appelant ces tenseurs des *bivecteurs*.

Les tenseurs contravariants d'ordre supérieur sont

$$\tilde{A}^{\alpha\ldots\sigma} = A^{\mu\ldots\tau} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\tau} \,. \tag{2.4}$$

Un champ vectoriel ou champ tensoriel de rang supérieur peut être considéré comme une distribution spatiale de grandeurs tensorielles. Par exemple, une force mécanique caractérisée par sa grandeur et sa direction et qui est distribuée dans un système physique, peut être représentée par un champ vectoriel.

Les tenseurs covariants de 1er rang A_α sont des objets géométriques qui se transforment suivant la loi

$$\tilde{A}_\alpha = A_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \,. \tag{2.5}$$

Le gradient d'un champ scalaire φ (c'est-à-dire la quantité $A_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$) est donc un tenseur covariant du 1er rang. Cela résulte immédiatement du fait que pour un invariant $\tilde{\varphi} = \varphi$, on a

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \,. \tag{2.6}$$

Les tenseurs covariants du 2ème rang $A_{\alpha\beta}$, sont des objets géométriques qui obéissent à la loi de transformation

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = A_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \,, \tag{2.7}$$

d'où les tenseurs covariants de rang supérieur qui s'écrivent

$$\tilde{A}_{\alpha\ldots\sigma} = A_{\mu\ldots\tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} \,. \tag{2.8}$$

Les tenseurs mixtes sont des tenseurs du 2ème rang et au delà, munis d'indices supérieurs et inférieurs. Par exemple, tout tenseur symétrique mixte A^α_β, est un objet géométrique qui se transforme selon la loi

$$\tilde{A}^\alpha_\beta = A^\mu_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \,. \tag{2.9}$$

Les grandeurs tensorielles sont définies indifféremment dans un espace métrique ou non métrique*. Etant donné un tenseur, il existe a^n composantes où a est sa dimension, et n est son rang. Par exemple, un tenseur quadridimensionnel de rang 0 possède une composante, un tenseur du 1er rang possède 4 composantes, un tenseur du 2ème rang a 16 composantes, etc...

Marquant les composantes axiales d'un objet géométrique, les indices sont également présents dans d'autres grandeurs qui ne sont pas nécessairement des grandeurs tensorielles.

En pratique, pour déterminer la nature tensorielle d'une grandeur, il convient de vérifier comment elle se transforme dans un autre système de référence. A ce titre, nous allons répondre à la question classique : les symboles de Christoffel (coefficients de cohérence de l'espace) sont-ils des tenseurs ?

Nous calculons d'abord ces grandeurs dans le référentiel tildé

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{g}^{\alpha\sigma}\,\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}\,, \quad \widetilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\nu}} + \frac{\partial\tilde{g}_{\nu\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\mu}} - \frac{\partial\tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}}\right) \tag{2.10}$$

puis nous les exprimons dans un sytème non tildé.

Calculons tout d'abord les termes entre parenthèses (2.10). Tout comme n'importe quel tenseur covariant du 2ème rang, le tenseur métrique fondamental se transforme dans le référentiel tildé suivant la loi

$$\tilde{g}_{\mu\sigma} = g_{\varepsilon\tau}\,\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}}\,. \tag{2.11}$$

Les $g_{\varepsilon\tau}$ dépendant des coordonnées non tildées, ses dérivées par rapport aux coordonnées tildées (qui sont fonctions de celles non tildées), se calculent selon la règle

$$\frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial\tilde{x}^{\nu}} = \frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial x^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\rho}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\,. \tag{2.12}$$

Alors, compte tenu de la règle de transformation du tenseur métrique fondamental, le premier terme entre parenthèses (2.10), s'écrit

$$\frac{\partial\tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\nu}} = \frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial x^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\rho}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\,\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}} + g_{\varepsilon\tau}\left(\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\sigma}}\,\frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\nu}\partial\tilde{x}^{\mu}} + \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}\,\frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\nu}\partial\tilde{x}^{\sigma}}\right). \tag{2.13}$$

Calculant donc les termes des symboles de Christoffel tildés restant

*Dans un espace non métrique il est bien connu que la distance entre deux points n'est pas mesurable. Les théories matérielles de la relativité générale et de ses extensions éventuelles sont de fait exprimées dans des espaces métriques où les mesures temporelle et spatiale prennent tout leur sens.

(2.10), et après transposition des indices libres, on obtient

$$\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\varepsilon\rho,\tau} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} + g_{\varepsilon\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \,, \tag{2.14}$$

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\gamma_{\varepsilon\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \,, \tag{2.15}$$

d'où il apparaît évident que les symboles de Christoffel se transforment différemment des tenseurs auxquels ils ne peuvent être identifiés.

Il est par ailleurs possible de représenter les tenseurs sous forme de matrice, sous réserve que cette représentation ne s'applique que pour les tenseurs du 1er ou 2ème rang (matrices unicolonnes et régulières). A titre d'exemple, le tenseur représentant le déplacement élémentaire quadridimensionnel, s'écrit

$$dx^\alpha = \left(dx^0,\, dx^1,\, dx^2,\, dx^3\right) , \tag{2.16}$$

tandis que le 4-tenseur métrique fondamental est

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} . \tag{2.17}$$

Si les tenseurs du 3ème rang sont des matrices à 3 dimensions, la représentation des matrices d'ordre supérieur reste problématique.

Passons maintenant à l'algèbre tensorielle dans la perspective de l'application au calcul tensoriel, c'est-à-dire aux opérations algébriques sur les tenseurs.

L'addition et la soustraction s'appliquent exclusivement aux tenseurs de même type et de même rang, et où figurent des indices placés au même endroit. *Ajoutant* deux tenseurs identiques et de rang n, on obtient un nouveau tenseur du même type et de même rang, et dont les composantes sont les sommes des composantes respectives des deux tenseurs initiaux. Par exemple

$$A^\alpha + B^\alpha = D^\alpha, \qquad A^\alpha_\beta + B^\alpha_\beta = D^\alpha_\beta \,. \tag{2.18}$$

La multiplication est par contre permise quelque soit le type ou le rang des tenseurs. On définira la *multiplication extérieure* de tenseurs de rang n et m, comme un tenseur de rang $(n+m)$

$$A_{\alpha\beta}\, B_\gamma = D_{\alpha\beta\gamma} \,, \qquad A_\alpha\, B^{\beta\gamma} = D^{\beta\gamma}_\alpha . \tag{2.19}$$

La multiplication de tenseurs de même rang et de même indice est

appelée *contraction* et donne un scalaire

$$A_\alpha B^\alpha = C\,, \qquad A^\gamma_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}_\gamma = D\,. \tag{2.20}$$

Plus généralement, la multiplication des tenseurs implique la contraction de certains indices. Cette opération est appelée *multiplication intérieure* car elle ne porte en général que sur certains indices dans cette multiplication. Exemple :

$$A_{\alpha\sigma} B^\sigma = D_\alpha\,, \qquad A^\gamma_{\alpha\sigma} B^{\beta\sigma}_\gamma = D^\beta_\alpha\,. \tag{2.21}$$

La multiplication interne de grandeurs géométriques permet de déterminer leurs natures tensorielles. Cette propriété s'exprime par le fameux théorème des fractions [9] :

Théorème des fractions

Si $B^{\sigma\beta}$ est un tenseur, et si sa multiplication par une grandeur $A_{\alpha\sigma}$ est aussi un tenseur D^β_α

$$A\,(\alpha,\sigma)\,B^{\sigma\beta} = D\,(\alpha,\beta)\,, \tag{2.22}$$

alors la grandeur $A_{\alpha\sigma}$ est un tenseur.

Prolongeant ce théorème, on énonce de même que si la multiplication d'un objet A^α_σ, par un tenseur $B^{\sigma\beta}$, donne un autre tenseur $D^{\alpha\beta}$

$$A_{\alpha\sigma} B^{\sigma\beta} = D^\beta_\alpha\,, \tag{2.23}$$

alors $A^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}$ est un tenseur.

Ou exprimé autrement, si la multiplication interne d'une grandeur A^α_σ par un tenseur $B^{\sigma\beta}$ donne un tenseur $D^{\alpha\beta}$

$$A^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} B^{\sigma\beta} = D^{\alpha\beta} \tag{2.24}$$

alors la grandeur A^α_σ est un tenseur.

Les propriétés géométriques d'un espace métrique sont définies par son tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$ qui permet d'élever ou abaisser les indices des grandeurs de cet espace*. Par exemple

$$g_{\alpha\beta} A^\beta = A_\alpha\,, \qquad g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} A_{\mu\nu\sigma} = A^\rho. \tag{2.25}$$

Dans les espaces riemanniens, le tenseur métrique fondamental mixte g^β_α est égal au tenseur unité $g^\beta_\alpha = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta^\beta_\alpha$. Les composantes diagonales du tenseur unité sont égales à l'unité, toutes les autres composan-

*Dans les espaces riemanniens, la métrique est quadratique $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$, et est appelée la *forme métrique riemannienne*, c'est-à-dire que le tenseur métrique fondamental d'un espace riemannien est le tenseur de 2ème rang $g_{\alpha\beta}$.

tes étant nulles par ailleurs. A l'aide du tenseur unité, on peut interchanger les indices des quantités quadridimensionnelles comme suit

$$\delta^\beta_\alpha A_\beta = A_\alpha\,, \qquad \delta^\nu_\mu \delta^\sigma_\rho A^{\mu\rho} = A^{\nu\sigma}. \tag{2.26}$$

La contraction d'un tenseur du 2ème rang avec le tenseur métrique fondamental donne la *trace* du tenseur

$$g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = A^\sigma_\sigma\,. \tag{2.27}$$

Par exemple, dans un espace pseudo-riemannien quadridimensionnel, la trace du tenseur métrique fondamental est

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = g^\sigma_\sigma = g^0_0 + g^1_1 + g^2_2 + g^3_3 = \delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 4. \tag{2.28}$$

Le tenseur métrique chr.inv. h_{ik} (1.27) possède toutes les propriétés du tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$ dans l'espace tridimensionnel de l'observateur.

Par conséquent h_{ik} permet d'abaisser, élever, ou échanger les indices des grandeurs chr.inv. Corrélativement, la trace d'un 3-tenseur chr.inv. s'obtient au moyen de sa contraction avec le tenseur métrique chr.inv. h_{ik}.

A titre d'exemple, la trace du tenseur des déformations d'espace D_{ik} (1.40) est

$$h^{ik} D_{ik} = D^m_m\,, \tag{2.29}$$

que l'on peut considérer comme représentant le taux de la dilatation relative d'un élément de volume spatial.

Bien évidemment, ce bref exposé analytique ne prétend pas couvrir l'ensemble d'une matière aussi vaste que celle de l'algèbre tensorielle. Indépendamment de la relativité générale, on pourra se reporter avec profit aux nombreux ouvrages mathématiques disponibles sur le sujet, notre propos se résumant uniquement à introduire ces notions pour la bonne compréhension de cet ouvrage.

§ 2.2 Produit scalaire de vecteurs

Dans un espace pseudo-riemannien, le *produit scalaire* de deux vecteurs A^α et B^α s'écrit

$$g_{\alpha\beta}\, A^\alpha B^\beta = A_\alpha B^\alpha = A_0 B^0 + A_i B^i. \tag{2.30}$$

Le produit scalaire est une contraction car la multiplication de vecteurs contracte tous les indices simultanément. Donc, le produit scalaire de deux vecteurs (tenseurs du 1er rang) sera toujours un scalaire (tenseur de rang zéro). Si les deux vecteurs sont identiques, leur produit

scalaire

$$g_{\alpha\beta}\, A^\alpha A^\beta = A_\alpha A^\alpha = A_0 A^0 + A_i A^i \tag{2.31}$$

est le carré du vecteur donné A^α. Par conséquent, la longueur de ce vecteur A^α est

$$A = |A^\alpha| = \sqrt{g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta}. \tag{2.32}$$

De par sa définition, la métrique de l'espace pseudo-riemannien est susceptible de deux signatures $(+---)$ ou $(-+++)$, les longueurs des 4-vecteurs peuvent être réelles imaginaires ou nulles. Les vecteurs de longueur non nulle (réelle ou imaginaire) sont dits *non isotropes*. Les vecteurs de longueur nulle sont appelés *isotropes* et sont tangents aux trajectoires de particules du genre lumière (trajectoires isotropes).

Dans l'espace euclidien tridimensionnel, le produit scalaire de deux vecteurs est une quantité scalaire dont la grandeur est égale au produit de leurs longueurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment

$$A_i B^i = |\, A^i \,|\, |\, B^i \,| \cos\big(A^i; B^i\big). \tag{2.33}$$

Théoriquement, en chaque point d'un espace riemannien, peut être défini un espace plan tangent, dont les vecteurs repères sont tangents au repère de l'espace riemannien en ce point. La métrique de l'espace tangent coïncide alors localement avec la métrique de l'espace riemannien. Cette circonstance se vérifie également dans l'espace riemannien proprement dit, pour les seules axes de coordonnées spatiales formant un angle. Partant, on peut voir que le produit scalaire de deux vecteurs est nul si les vecteurs sont orthogonaux. En d'autres termes, ce produit scalaire représente géométriquement la projection d'un vecteur sur l'autre. Si ces vecteurs sont identiques, le vecteur se projette alors sur lui-même et le résultat de cette projection est le carré de sa longueur.

Notant les projections chr.inv. des vecteurs arbitraires A^α et B^α selon

$$a = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad a^i = A^i, \tag{2.34}$$

$$b = \frac{B_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad b^i = B^i, \tag{2.35}$$

les autres composantes sont alors

$$A^0 = \frac{a + \frac{1}{c}\, v_i\, a^i}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,, \qquad A_i = -\, a_i - \frac{a}{c}\, v_i\,, \tag{2.36}$$

$$B^0 = \frac{b + \frac{1}{c}\, v_i\, b^i}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,, \qquad B_i = -\, b_i - \frac{b}{c}\, v_i\,. \tag{2.37}$$

Substituant les projections chr.inv. dans les formules $A_\alpha B^\alpha$ et $A_\alpha A^\alpha$, il vient

$$A_\alpha B^\alpha = ab - a_i b^i = ab - h_{ik}\, a^i b^k, \tag{2.38}$$

$$A_\alpha A^\alpha = a^2 - a_i a^i = a^2 - h_{ik}\, a^i a^k. \tag{2.39}$$

Ce faisant, nous voyons que le carré de n'importe quelle longueur (norme) de vecteur est la différence entre les carrés des longueurs de ses projections temporelle et spatiales chr.inv. Si les deux projections sont égales, la longueur du vecteur est nulle, et celui-ci est isotrope. Il en découle qu'un vecteur isotrope relève d'une répartition identique entre la valeur de la ligne de temps et celle de la section spatiale. L'égalité des projections du temps et d'espace chr.inv. implique aussi que le vecteur est orthogonal à lui-même. Si la projection temporelle "prévaut", le vecteur sera réel. A contrario, si la projection spatiale "l'emporte", le vecteur sera imaginaire.

Le produit scalaire d'un vecteur quadridimensionnel quelconque avec lui-même sera représenté par le carré de la longueur de l'intervalle d'espace-temps

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = dx_\alpha dx^\alpha = dx_0 dx^0 + dx_i dx^i. \tag{2.40}$$

En termes de grandeurs physiquement observables, celui-ci peut être écrit sous la forme

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dx_i dx^i = c^2 d\tau^2 - h_{ik}\, dx^i dx^k = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \tag{2.41}$$

Sa grandeur $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta}$ est soit réelle, imaginaire, ou nulle suivant que ds est du genre temps $c^2 d\tau^2 > d\sigma^2$ (trajectoires subluminiques réelles), du genre espace $c^2 d\tau^2 < d\sigma^2$ (trajectoires supraluminiques imaginaires), ou isotropes $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2$ (trajectoires du genre lumière).

§ 2.3 Produit vectoriel de vecteurs. Tenseurs antisymétriques. Pseudo-tenseurs

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs A^α et B^α est un tenseur du 2ème rang $V^{\alpha\beta}$ obtenu par leur multiplication extérieure, selon la règle

$$V^{\alpha\beta} = \left[A^\alpha; B^\beta\right] = \frac{1}{2}\left(A^\alpha B^\beta - A^\beta B^\alpha\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A^\alpha & A^\beta \\ B^\alpha & B^\beta \end{vmatrix}. \tag{2.42}$$

Ainsi qu'il est aisé de voir, l'ordre selon lequel les vecteurs sont multipliés doit être pris en considération, c'est-à-dire que l'ordre des indices tensoriels ne doit pas être quelconque. Les tenseurs ainsi obtenus par

produits vectoriels sont *antisymétriques*. Considérons le tenseur antisymétrique $V^{\alpha\beta} = -V^{\beta\alpha}$, ses indices lorsqu'ils sont "bougés", laissent une place figurée par un point marquant de la sorte l'origine de l'indice ainsi déplacé. Pour les tenseurs symétriques, ce problème ne se pose pas car l'ordre des indices est indifférent. En particulier, le tenseur métrique fondamental est symétrique $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, alors que le tenseur de courbure d'espace $R^{\alpha\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ est symétrique par rapport à la permutation des couples d'indices, et antisymétrique par rapport à chaque indice interne à ces couples. Manifestement, seuls les tenseurs de 2ème rang ou plus peuvent être symétriques ou antisymétriques.

Par définition, toutes les composantes diagonales d'un tenseur antisymétrique sont nulles. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire les composantes d'un tenseur antisymétrique de 2ème rang

$$V^{\alpha\alpha} = [A^\alpha; B^\alpha] = \frac{1}{2}\left(A^\alpha B^\alpha - A^\alpha B^\alpha\right) = 0\,. \tag{2.43}$$

Dans un espace euclidien tridimensionnel, la valeur numérique du produit vectoriel de deux vecteurs, est définie comme la surface d'un parallélogramme construit par ces deux vecteurs, et de grandeur égale au produit de leur module, multiplié par le sinus de l'angle ainsi formé

$$V^{ik} = |\,A^i\,|\,|\,B^k\,|\sin\left(A^i; B^k\right). \tag{2.44}$$

Il en résulte que le produit vectoriel de deux vecteurs (c.a.d. un tenseur antisymétrique de 2ème rang) est assimilable à une aire orientée dans l'espace et déterminée par leur direction.

La contraction d'un tenseur antisymétrique $V_{\alpha\beta}$ avec un tenseur symétrique $A^{\alpha\beta} = A^\alpha A^\beta$ est nulle car $V_{\alpha\alpha} = 0$, avec $V_{\alpha\beta} = -V_{\beta\alpha}$, et donc

$$V_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta = V_{00}A^0A^0 + V_{0i}A^0A^i + V_{i0}A^iA^0 + V_{ik}A^iA^k = 0\,. \tag{2.45}$$

En accord avec la théorie des invariants chronométriques, les projections chr.inv. d'un tenseur antisymétrique de 2ème rang $V^{\alpha\beta}$ sont

$$\frac{V_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{V_{\cdot 0}^{i\cdot}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{2}\left(ab^i - ba^i\right), \tag{2.46}$$

$$V^{ik} = \frac{1}{2}\left(a^ib^k - a^kb^i\right), \tag{2.47}$$

où la 3ème projection chr.inv. $\frac{V_{00}}{g_{00}}$ (1.32) est égale à zéro en vertu de la nullité des composantes diagonales du tenseur antisymétrique.

Les composantes physiquement observables V^{ik} (projections de $V^{\alpha\beta}$, sur la section spatiale de l'observateur), sont analogues à un produit

vectoriel du 3-espace, tandis que la quantité $\frac{V_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}$ qui est la projection (mixte) du tenseur $V^{\alpha\beta}$, n'a pas d'équivalent parmi les composantes d'un produit vectoriel classique.

Le carré d'un tenseur antisymétrique de 2ème rang formulé à l'aide des projections chr.inv. des vecteurs qui le composent, est

$$V_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\big(a_i a^i b_k b^k - a_i b^i a_k b^k\big) + aba_i b^i - \frac{1}{2}\big(a^2 b_i b^i - b^2 a_i a^i\big)\,. \quad (2.48)$$

Les deux derniers termes contiennent les quantités a (2.34) et b (2.35), qui sont les projections chr.inv. des vecteurs A^α et B^α du produit, sur la ligne de temps de l'observateur, et n'ont pas non plus d'équivalent dans la définition d'un produit vectoriel classique du 3-espace euclidien.

On définit un champ tensoriel asymétrique au moyen d'un tenseur antisymétrique particulier. Rapportés à un système galiléen*, ce sont les tenseurs de Levi-Civita. Pour les grandeurs quadridimensionnelles, il s'agit des *4-tenseurs unité complètement antisymétriques* $e^{\alpha\beta\mu\nu}$, tandis que pour les quantités tridimensionnelles, il s'agit du 3-tenseur unité complètement antisymétrique e^{ikm}. Ses composantes changent de signe par transposition de deux indices quelconques, et celles non nulles sont égales à ± 1. Les indices identiques de ses composantes sont égales à zéro. Par ailleurs, pour la signature $(+---)$, toutes les composantes non nulles ont le signe opposé à celles ayant les indices covariants†. Par exemple, dans l'espace de Minkowski, on a

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}g_{\mu\tau}g_{\nu\gamma}e^{\sigma\rho\tau\gamma} &= g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\,e^{0123} = -\,e^{0123} \\ g_{i\alpha}g_{k\beta}g_{m\gamma}\,e^{\alpha\beta\gamma} &= g_{11}g_{22}g_{33}\,e^{123} = -\,e^{123} \end{aligned}\right\}. \quad (2.49)$$

En raison, de notre choix de la signature, $g_{00}=1$ et $g_{11}=g_{22}=g_{33}=$ $=-1$, les composantes du tenseur $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ sont donc

$$\left.\begin{aligned} &e^{0123}=+1, \quad e^{1023}=-1, \quad e^{1203}=+1, \quad e^{1230}=-1 \\ &e_{0123}=-1, \quad e_{1023}=+1, \quad e_{1203}=-1, \quad e_{1230}=+1 \end{aligned}\right\} \quad (2.50)$$

et les composantes du tenseur e^{ikm} seront

$$\left.\begin{aligned} &e^{123}=+1, \quad e^{213}=-1, \quad e^{231}=+1 \\ &e_{123}=-1, \quad e_{213}=+1, \quad e_{231}=-1 \end{aligned}\right\}. \quad (2.51)$$

---

*Un *référentiel galiléen*, n'étant pas soumis aux rotations, ou déformations, il est inertiel dans l'espace-temps de la relativité restreinte (espace de Minkowski). Les lignes de temps et les axes tridimensionnels sont linéaires.

†Si la signature de l'espace-temps est $(-+++)$, cela n'est vrai que pour le 4-tenseur $e^{\alpha\beta\mu\nu}$. Les composantes du 3-tenseur e^{ikm} auront toujours le même signe que leurs homologues de e_{ikm}.

Le produit du 4-tenseur $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ par lui-même, forme un 4-tenseur ordinaire d'ordre 8, dont les composantes non nulles sont représentées par la matrice

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\tau\rho\gamma} = -\begin{pmatrix} \delta^\alpha_\sigma & \delta^\alpha_\tau & \delta^\alpha_\rho & \delta^\alpha_\gamma \\ \delta^\beta_\sigma & \delta^\beta_\tau & \delta^\beta_\rho & \delta^\beta_\gamma \\ \delta^\mu_\sigma & \delta^\mu_\tau & \delta^\mu_\rho & \delta^\mu_\gamma \\ \delta^\nu_\sigma & \delta^\nu_\tau & \delta^\nu_\rho & \delta^\nu_\gamma \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Les propriétés restantes du tenseur $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ se déduisent par contraction des indices

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\tau\rho\nu} = -\begin{pmatrix} \delta^\alpha_\sigma & \delta^\alpha_\tau & \delta^\alpha_\rho \\ \delta^\beta_\sigma & \delta^\beta_\tau & \delta^\beta_\rho \\ \delta^\mu_\sigma & \delta^\mu_\tau & \delta^\mu_\rho \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\tau\mu\nu} = -2\begin{pmatrix} \delta^\alpha_\sigma & \delta^\alpha_\tau \\ \delta^\beta_\sigma & \delta^\beta_\tau \end{pmatrix} = -2\left(\delta^\alpha_\sigma\delta^\beta_\tau - \delta^\beta_\sigma\delta^\alpha_\tau\right), \tag{2.54}$$

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\sigma\beta\mu\nu} = -6\delta^\alpha_\sigma\,, \quad e^{\alpha\beta\mu\nu}e_{\alpha\beta\mu\nu} = -6\delta^\alpha_\alpha = -24. \tag{2.55}$$

Multipliant le 3-tenseur unité antisymétrique e^{ikm} par lui-même, on obtient un tenseur ordinaire du 6ème rang

$$e^{ikm}e_{rst} = \begin{pmatrix} \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

On vérifie les autres propriétés du tenseur e^{ikm}

$$e^{ikm}e_{rsm} = -\begin{pmatrix} \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_r & \delta^k_s \end{pmatrix} = \delta^i_s\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_s\,, \tag{2.57}$$

$$e^{ikm}e_{rkm} = 2\delta^i_r\,, \quad e^{ikm}e_{ikm} = 2\delta^i_i = 6. \tag{2.58}$$

A partir du tenseur unité complètement symétrique et d'une grandeur tensorielle, on définit un *pseudo-tenseur* muni d'une astérisque. Par exemple, aux scalaires, 4-vecteurs et 4-tenseurs des 2ème, 3ème et 4ème rang, vont correspondre les pseudo-tenseurs quadridimensionnels de rang suivant

$$\left.\begin{aligned} V^{*\alpha\beta\mu\nu} = e^{\alpha\beta\mu\nu}V, \quad V^{*\alpha\beta\mu} = e^{\alpha\beta\mu\nu}V_\nu\,, \quad V^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\mu\nu} \\ V^{*\alpha} = \frac{1}{6}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\beta\mu\nu}\,, \quad V^* = \frac{1}{24}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned}\right\}, \tag{2.59}$$

où les pseudo-tenseurs du 1er rang $V^{*\alpha}$ sont appelés *pseudo-vecteurs*, alors que les pseudo-tenseurs de rang zéro V^* sont des *pseudo-scalaires*. Chaque tenseur et son pseudo-tenseur correspondant sont dits *duaux*, afin de souligner leur origine commune. Les 3-tenseurs ont aussi leurs 3-pseudo-tenseurs respectifs

$$\left.\begin{aligned} V^{*ikm} &= e^{ikm}V, \qquad & V^{*ik} &= e^{ikm}V_m \\ V^{*i} &= \frac{1}{2}\,e^{ikm}V_{km}\,, \quad & V^* &= \frac{1}{6}\,e^{ikm}V_{ikm} \end{aligned}\right\}. \tag{2.60}$$

Contrairement aux tenseurs ordinaires, les pseudo-tenseurs ne changent pas de signe dans la réflexion du système de coordonnées.

A titre d'exemple, lors de la réflexion des axes, on a $x^1 = -\tilde{x}^1$, $x^2 = \tilde{x}^2$, $x^3 = \tilde{x}^3$. La composante réfléchie d'un tenseur antisymétrique V_{ik} orthogonal à x^1 est $\widetilde{V}_{23} = -V_{23}$, alors que la composante duale du pseudo-vecteur V^{*i} est

$$\left.\begin{aligned} V^{*1} &= \frac{1}{2}\,e^{1km}V_{km} = \frac{1}{2}\big(e^{123}V_{23} + e^{132}V_{32}\big) = V_{23} \\ \widetilde{V}^{*1} &= \frac{1}{2}\,\tilde{e}^{1km}\widetilde{V}_{km} = \frac{1}{2}\,e^{k1m}\widetilde{V}_{km} = \frac{1}{2}\big(e^{213}\widetilde{V}_{23} + e^{312}\widetilde{V}_{32}\big) = V_{23} \end{aligned}\right\}. \tag{2.61}$$

La contraction d'un 4-tenseur antisymétrique de 2ème rang avec son pseudo-tenseur dual de même rang fournit un pseudo-scalaire

$$V_{\alpha\beta}V^{*\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\mu\nu} = e^{\alpha\beta\mu\nu}B_{\alpha\beta\mu\nu} = B^*. \tag{2.62}$$

Le carré d'un pseudo-tenseur $V^{*\alpha\beta}$ et le carré d'un pseudo-vecteur V^{*i}, s'expriment par les tenseurs duaux selon

$$V_{*\alpha\beta}V^{*\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\mu\nu}e^{\alpha\beta\rho\sigma}V_{\rho\sigma} = -24V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}, \tag{2.63}$$

$$V_{*i}V^{*i} = e_{ikm}V^{km}e^{ipq}V_{pq} = 6V_{km}V^{km}. \tag{2.64}$$

Dans les espaces pseudo-riemanniens inhomogènes et anisotropes, il est impossible de fixer un référentiel galiléen et donc le tenseur complètement antisymétrique va dépendre de cette inhomogénéité et anistropie par l'intermédiaire du tenseur métrique fondamental.

Dans ce cas général, on est conduit à définir le *4-tenseur discriminant complètement antisymétrique*

$$E^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{e^{\alpha\beta\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\,, \qquad E_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{-g}\,. \tag{2.65}$$

Soit un système galiléen non tildé. En vertu des règles générales des transformations tensorielles, on a

$$\tilde{e}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu}\, e_{\sigma\gamma\varepsilon\tau} = J e_{\alpha\beta\mu\nu}\,, \tag{2.66}$$

où $J = \det\left\|\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\sigma}\right\|$ est appelé le *jacobien de la transformation* (le déterminant de la matrice jacobienne)

$$J = \det\left\|\begin{array}{cccc} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} \end{array}\right\|. \tag{2.67}$$

Ecrivons la formule de transformation du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}\, g_{\mu\nu}\,. \tag{2.68}$$

Son déterminant dans le référentiel tildé est

$$\tilde{g} = \det\left\|\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}\, g_{\mu\nu}\right\| = J^2 g\,. \tag{2.69}$$

Dans le référentiel galiléen (non tildé), nous avons

$$g = \det\|g_{\alpha\beta}\| = \det\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\| = -1, \tag{2.70}$$

d'où $J^2 = -\tilde{g}^2$. Exprimant $\tilde{e}_{\alpha\beta\mu\nu}$ dans un référentiel arbitraire par $E_{\alpha\beta\mu\nu}$, et écrivant le tenseur métrique sous forme tildée, on obtient $E_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{-g}$ (2.65). De la même façon, on trouve les règles de transformation pour les composantes $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ en tenant compte de $g = \tilde{g}\,\tilde{J}^2$, où $\tilde{J} = \det\left\|\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\right\|$.

Le tenseur discriminant $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ n'est pas une quantité physiquement observable, par contre on peut définir le *tenseur discriminant tridimensionnel chr.inv.*

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = h^\alpha_\mu h^\beta_\nu h^\gamma_\rho b_\sigma E^{\sigma\mu\nu\rho} = b_\sigma E^{\sigma\alpha\beta\gamma}, \tag{2.71}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\rho_\gamma b^\sigma E_{\sigma\mu\nu\rho} = b^\sigma E_{\sigma\alpha\beta\gamma}\,, \tag{2.72}$$

qui compte tenu de $\sqrt{-g} = \sqrt{h}\,\sqrt{g_{00}}$, prend la forme dans le référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$)

$$\varepsilon^{ikm} = b_0 E^{0ikm} = \sqrt{g_{00}}\, E^{0ikm} = \frac{e^{ikm}}{\sqrt{h}}\,, \tag{2.73}$$

$$\varepsilon_{ikm} = b^0 E_{0ikm} = \frac{E_{0ikm}}{\sqrt{g_{00}}} = e_{ikm}\sqrt{h}\,. \tag{2.74}$$

A l'aide de celui-ci, on peut transformer les tenseurs chr.inv. en pseudo-tenseurs chr.inv. Prenant par exemple, le tenseur antisymétrique chr.inv. des vitesses angulaires de la rotation d'espace A_{ik} (1.36), on obtient le pseudo-vecteur chr.inv. de cette rotation $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm} A_{km}$.

§ 2.4 Différentielles et dérivées directionnelles

En géométrie, la *différentielle* d'une fonction est sa variation entre deux points infiniment voisins de coordonnées x^α et $x^\alpha + dx^\alpha$. Corrélativement, la *différentielle absolue* dans un espace à n-dimensions, est la variation de quantités à n dimensions entre deux points voisins de n-coordonnées de cet espace. En ce qui concerne les fonctions continues communément utilisées, leur variation entre deux points voisins est toujours considérée comme infinitésimale. Cependant, pour définir la variation infinitésimale d'une grandeur tensorielle, on ne peut pas s'appuyer sur une simple différence entre ses valeurs numériques définies au point x^α et $x^\alpha + dx^\alpha$, car l'algèbre tensorielle ne définit pas le rapport entre ces valeurs numériques en des points distincts de l'espace. Ce rapport ne peut être défini qu'en appliquant les règles de transformation des tenseurs lors du passage d'un référentiel à un autre. Donc, les opérateurs différentiels et le résultat de leurs applications doivent être des tenseurs.

A titre d'exemple, la différentielle absolue d'une grandeur tensorielle est un tenseur de même rang que le tenseur initial. Pour un scalaire φ, il s'agit du scalaire

$$\mathrm{D}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha, \tag{2.75}$$

qui est dans le référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$)

$$\mathrm{D}\,\varphi = \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial t}\, d\tau + \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{2.76}$$

En dehors de la 3-différentielle observable, on remarque un terme supplémentaire qui tient compte de la dépendance du déplacement absolu $\mathrm{D}\varphi$ par rapport à l'écoulement du temps physiquement observable $d\tau$. La différentielle absolue d'un vecteur contravariant A^α formu-

lée à l'aide de l'opérateur de dérivation absolue ∇ (nabla), est

$$\mathrm{D}A^\alpha = \nabla_\sigma A^\alpha dx^\sigma = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A^\mu dx^\sigma = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A^\mu dx^\sigma, \quad (2.77)$$

où $\nabla_\sigma A^\alpha$ est la dérivée absolue de A^α par rapport à x^σ, et où d représente la différentielle ordinaire

$$\nabla_\sigma A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A^\mu, \quad (2.78)$$

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha. \quad (2.79)$$

Formuler la différentielle absolue à l'aide de grandeurs physiquement observables, revient à projeter sa forme covariante sur les lignes de temps et sur la section spatiale dans le référentiel d'accompagnement

$$T = b_\alpha \mathrm{D}A^\alpha = \frac{g_{0\alpha}\mathrm{D}A^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad B^i = h^i_\alpha \mathrm{D}A^\alpha. \quad (2.80)$$

Dénotons les projections chr.inv. du vecteur A^α suivant

$$\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad q^i = A^i, \quad (2.81)$$

nous aurons pour ses composantes restantes

$$A_0 = \varphi\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \quad A^0 = \frac{\varphi + \frac{1}{c}\, v_i q^i}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,, \quad A_i = -q_i - \frac{\varphi}{c}\, v_i\,. \quad (2.82)$$

Etant donné qu'une différentielle ordinaire s'écrit sous forme chr.inv.

$$d = \frac{{}^*\partial}{\partial t}\, d\tau + \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\, dx^i\,, \quad (2.83)$$

et compte tenu de l'expression des symboles de Christoffel du référentiel d'accompagnement (1.45–1.46), leurs substitutions dans T et B^i (2.80) donnent les projections chr.inv. de la différentielle absolue du vecteur A^α

$$T = b_\alpha \mathrm{D}A^\alpha = d\varphi + \frac{1}{c}\left(-F_i q^i d\tau + D_{ik} q^i dx^k\right), \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} B^i = h^i_\sigma \mathrm{D}A^\sigma = dq^i + \left(\frac{\varphi}{c}\, dx^k + q^k d\tau\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \\ - \frac{\varphi}{c}\, F^i d\tau + \Delta^i_{mk}\, q^m dx^k. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Pour établir les équations du mouvement chr.inv., nous aurons également besoin des projections chr.inv. de la *dérivée absolue d'un vecteur*

suivant une direction tangente à la trajectoire.

Géométriquement, la dérivée d'une fonction dans une direction, est sa variation par rapport à un déplacement élémentaire le long de la direction considérée.

Exemple : la dérivée d'une fonction scalaire φ suivant une direction définie par la courbe $x^\alpha = x^\alpha(\rho)$, où ρ, paramètre monotone non nul est pris le long de cette courbe, mesure la variation de cette fonction

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho}\,. \tag{2.86}$$

Dans le référentiel d'accompagnement cette variation est

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{d\rho} = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}\frac{d\tau}{d\rho} + \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\rho}\,. \tag{2.87}$$

La dérivée absolue d'un vecteur A^α suivant la direction donnée d'une courbe A^α s'écrit

$$\frac{\mathrm{D}A^\alpha}{d\rho} = \nabla_\sigma A^\alpha \frac{dx^\sigma}{d\rho} = \frac{dA^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A^\mu \frac{dx^\sigma}{d\rho}\,, \tag{2.88}$$

et ses projections chr.inv.

$$b_\alpha \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{c}\left(-F_i q^i \frac{d\tau}{d\rho} + D_{ik} q^i \frac{dx^k}{d\rho}\right), \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned} h^i_\sigma \frac{\mathrm{D}A^\sigma}{d\rho} = \frac{dq^i}{d\rho} + \left(\frac{\varphi}{c}\frac{dx^k}{d\rho} + q^k \frac{d\tau}{d\rho}\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \\ - \frac{\varphi}{c} F^i \frac{d\tau}{d\rho} + \Delta^i_{mk}\, q^m \frac{dx^k}{d\rho}\,. \end{aligned} \tag{2.90}$$

En fait, les projections représentent les équations du mouvement chr.inv., cependant, une fois défini un vecteur particulier associé au mouvement d'une particule, nous pouvons calculer les projections chr.inv. pour les substituer dans les équations données de façon à obtenir les équations du mouvement chr.inv.

§ 2.5 Divergence et rotationnel

La *divergence* d'un champ de tenseurs représente sa "variation" le long d'un axe de coordonnées. Corrélativement, la divergence absolue d'un champ de tenseurs de dimensions n, est sa divergence dans un espace à n dimensions. La divergence d'un tenseur est la contraction d'un champ tensoriel avec l'opérateur de dérivation absolue ∇. La divergence d'un

champ de vecteurs est le scalaire

$$\nabla_\sigma A^\sigma = \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} A^\mu, \tag{2.91}$$

tandis que la divergence d'un champ de tenseurs de 2ème rang est le vecteur

$$\nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} F^{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} F^{\sigma\mu}, \tag{2.92}$$

où l'on démontre que $\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}$ est égal à

$$\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.93}$$

Pour ce faire, on écrit d'abord la définition des symboles de Christoffel

$$\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} = g^{\sigma\rho}\Gamma_{\mu\sigma,\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho}\right). \tag{2.94}$$

Puisque σ et ρ sont des indices libres, ils peuvent être échangés. En contractant, avec le tenseur $g^{\rho\sigma}$, le premier et le dernier terme s'annulent et $\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}$ se réduit à

$$\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}\,. \tag{2.95}$$

Les $g^{\rho\sigma}$ sont les composantes du tenseur inverse de $g_{\rho\sigma}$, donc en représentation matricielle, on a

$$g^{\rho\sigma} = \frac{a^{\rho\sigma}}{g}\,, \qquad g = \det\|g_{\rho\sigma}\|\,, \tag{2.96}$$

où $a^{\rho\sigma}$ est le cofacteur algébrique de l'élément matriciel d'indices σ et ρ qui est égal à $(-1)^{\rho+\sigma}$ multiplié par le déterminant de la matrice $g_{\rho\sigma}$. On obtient donc $a^{\rho\sigma} = g g^{\rho\sigma}$.

Le déterminant du tenseur métrique fondamental $g = \det\|g_{\rho\sigma}\|$ étant par définition

$$g = \sum_{\alpha_0\ldots\alpha_3} (-1)^{N(\alpha_0\ldots\alpha_3)}\, g_{0(\alpha_0)} g_{1(\alpha_1)} g_{2(\alpha_2)} g_{3(\alpha_3)}\,, \tag{2.97}$$

dg sera $dg = a^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma} = g g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}$, ou

$$\frac{dg}{g} = g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}\,. \tag{2.98}$$

Intégrant le premier membre $\ln(-g)$, on a donc $d\ln(-g) = \frac{dg}{g}$ et compte tenu de $(-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(-g)$, il vient

$$d\ln\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}\,. \tag{2.99}$$

Comme on le voit, $\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu}$ (2.95) a bien la forme (2.93)

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}}\,. \tag{2.100}$$

A présent, nous allons déduire les projections chr.inv. de la divergence d'un champ de vecteurs (2.91), et celles de la divergence d'un champ de tenseurs de 2ème rang (2.92). La divergence d'un champ de vecteur A^{α} est un scalaire, donc $\nabla_{\sigma} A^{\sigma}$ ne peut pas être projeté sur les lignes de temps et sur les sections spatiales, mais il est suffisant ici d'utiliser les projections chr.inv. de A^{α} et les propriétés chr.inv. de l'espace de référence. Par ailleurs, les opérateurs de dérivation ordinaires seront remplacés par les opérateurs chr.inv.

Notant φ et q^i les projections chr.inv. du vecteur A^{α} (2.81), nous exprimerons les composantes restantes du vecteur au moyen de ces mêmes projections (2.82). Substituant alors les opérateurs de dérivation ordinaires exprimés au moyen des opérateurs chr.inv.

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{{}^{*}\partial}{\partial t}\,, \qquad \sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\,, \tag{2.101}$$

$$\frac{{}^{*}\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\, v_i \frac{{}^{*}\partial}{\partial t}\,, \tag{2.102}$$

dans (2.91), et tenant compte de $\sqrt{-g} = \sqrt{h}\,\sqrt{g_{00}}$ on obtient après calculs

$$\nabla_{\sigma} A^{\sigma} = \frac{1}{c}\left(\frac{{}^{*}\partial\varphi}{\partial t} + \varphi D\right) + \frac{{}^{*}\partial q^i}{\partial x^i} + q^i\, \frac{{}^{*}\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\, F_i\, q^i. \tag{2.103}$$

Dans le troisième terme, la quantité

$$\frac{{}^{*}\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = \Delta^{j}_{ji} \tag{2.104}$$

représente les symboles de Christoffel chr.inv. Δ^{k}_{ji} (1.47) contracté sur deux indices. Par analogie avec la définition de la divergence absolue d'un champ de vecteurs (2.91), la quantité

$$\frac{{}^{*}\partial q^i}{\partial x^i} + q^i\, \frac{{}^{*}\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = \frac{{}^{*}\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \Delta^{j}_{ji} = {}^{*}\nabla_i\, q^i \tag{2.105}$$

est la *divergence chr.inv.* du 3-vecteur q^i. En conséquence, nous appellerons *divergence physique chr.inv.* du champ de vecteurs q^i, la quantité

chr.inv.

$$ {}^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = {}^*\nabla_i\, q^i - \frac{1}{c^2}\, F_i\, q^i, \tag{2.106} $$

dans laquelle le deuxième terme prend en compte le fait que le temps s'écoule différemment sur les parois opposées d'un élément de volume [9]. En fait, le calcul de cette divergence porte sur un volume élémentaire de l'espace, et donc, nous calculons la différence entre la quantité de "substance" qui entre et celle qui sort durant l'intervalle de temps élémentaire. Mais, la présence du champ d'inertie gravitationnel F^i (1.38) entraîne un écoulement du temps différent en des points distincts de l'espace. De ce fait, si nous mesurons des durées d'intervalle temporel en chaque paroi opposée du volume, les débuts et fins de cet intervalle ne coïncident plus, invalidant ainsi la possibilité d'une comparaison. Seule, la synchronisation d'horloges à chaque paroi opposée du volume, permettra de fournir une image correcte (les durées des intervalles mesurées seront différentes).

L'équation finale pour $\nabla_\sigma A^\sigma$ sera donc

$$ \nabla_\sigma A^\sigma = \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \varphi D\right) + {}^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i. \tag{2.107} $$

Le second terme dans cette formule est une observable physique analogue à une divergence ordinaire dans l'espace tridimensionnel de l'observateur. Le premier terme n'a pas d'équivalent en théorie classique et est constitué de deux parties : $\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}$ qui est la variation par rapport au temps de la projection temporelle φ du vecteur A^α, alors que $D\,\varphi$ est la variation par rapport au temps d'un volume du champ de vecteurs tridimensionnels q^i, car la trace du tenseur chr.inv. du taux de déformations de l'espace $D = h^{ik} D_{ik} = D^n_n$ est le taux de dilatation relative d'un volume élémentaire de l'espace.

Appliquant $\nabla_\sigma A^\sigma = 0$ au 4-potentiel A^α d'un champ électromagnétique, on obtient la condition de Lorentz pour ce champ. La condition de Lorentz sous forme chr.inv. s'écrit ainsi

$$ {}^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = -\frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \varphi D\right). \tag{2.108} $$

A présent, nous allons déduire les projections chr.inv. de la divergence d'un tenseur antisymétrique arbitraire $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ (ces expressions nous seront utiles pour l'obtention des équations de Maxwell sous forme chr.inv.)

$$ \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} F^{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} F^{\sigma\mu} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\mu}\, F^{\alpha\mu}, \tag{2.109} $$

où le troisième terme $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} F^{\sigma\mu}$ est nul, en vertu de la contraction des symboles de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}$ (symétriques sur les indices inférieurs), avec un tenseur antisymétrique $F^{\sigma\mu}$.

Le terme $\nabla_\sigma F^{\sigma\alpha}$ est un 4-vecteur, donc ses projections chr.inv. sont

$$T = b_\alpha \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha}, \qquad B^i = h^i_\alpha \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \nabla_\sigma F^{i\alpha}. \tag{2.110}$$

Notant les projections chr.inv. du tenseur $F^{\alpha\beta}$ par

$$E^i = \frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad H^{ik} = F^{ik}, \tag{2.111}$$

alors les composantes restantes non nulles du tenseur seront

$$F_{0\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{c}\, v_k E^k, \tag{2.112}$$

$$F_{k\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(E_i - \frac{1}{c}\, v_n H_{k\cdot}^{\cdot n} - \frac{1}{c^2}\, v_k v_n E^n \right), \tag{2.113}$$

$$F^{0i} = \frac{E^i - \frac{1}{c}\, v_k H^{ik}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad F_{0i} = -\sqrt{g_{00}}\, E_i\,, \tag{2.114}$$

$$F_{i\cdot}^{\cdot k} = -H_{i\cdot}^{\cdot k} - \frac{1}{c}\, v_i E^k, \quad F_{ik} = H_{ik} + \frac{1}{c}\,(v_i E_k - v_k E_i)\,, \tag{2.115}$$

et le carré de ce tenseur $F^{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = H_{ik} H^{ik} - 2 E_i E^i. \tag{2.116}$$

Substituant les composantes dans (2.110), et remplaçant les opérateurs de dérivation ordinaire par les opérateurs chr.inv., on obtient après calculs

$$T = \frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{{}^*\partial E^i}{\partial x^i} + E^i \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\, H^{ik} A_{ik}\,, \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned} B^i = \nabla_\sigma F^{\sigma i} = \frac{{}^*\partial H^{ik}}{\partial x^k} + H^{ik} \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}\, F_k H^{ik} - \\ - \frac{1}{c} \left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + D E^i \right), \end{aligned} \tag{2.118}$$

où A_{ik} est le tenseur antisymétrique chr.inv. de non holonomicité d'espace. Sachant que

$$\frac{{}^*\partial E^i}{\partial x^i} + E^i \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = {}^*\nabla_i E^i \tag{2.119}$$

est la divergence chr.inv. du vecteur E^i, et que

$$ {}^*\nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} = {}^*\widetilde{\nabla}_k H^{ik} \tag{2.120} $$

représente la divergence physique chr.inv. du tenseur H^{ik}, nous parvenons aux équations finales pour les projections chr.inv. de la divergence d'un tenseur antisymétrique arbitraire $F^{\alpha\beta}$

$$ T = {}^*\nabla_i E^i - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} \,, \tag{2.121} $$

$$ B^i = {}^*\widetilde{\nabla}_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + D E^i \right). \tag{2.122} $$

Par conséquent, les projections chr.inv. de la divergence du pseudo-tenseur $F^{*\alpha\beta}$, qui est dual du tenseur antisymétrique $F^{\alpha\beta}$, s'écrivent

$$ F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \,, \qquad F_{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{2.123} $$

Ses projections chr.inv. sont notées

$$ H^{*i} = \frac{F^{*\cdot i}_{0\cdot}}{\sqrt{g_{00}}} \,, \qquad E^{*ik} = F^{*ik}, \tag{2.124} $$

d'où l'on a les relations évidentes $H^{*i} \sim H^{ik}$ et $E^{*ik} \sim E^i$ entre les quantités chr.inv. et les projections chr.inv. du tenseur antisymétrique $F^{\alpha\beta}$ (2.111), en raison de la dualité des quantités $F^{\alpha\beta}$ et $F^{*\alpha\beta}$. Etant donné que

$$ \frac{F^{*\cdot i}_{0\cdot}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipq} H_{pq} \,, \qquad F^{*ik} = -\, \varepsilon^{ikp} E_p \,, \tag{2.125} $$

les composantes restantes du pseudo-tenseur $F^{*\alpha\beta}$ formulées à l'aide des projections chr.inv. de son tenseur dual $F^{\alpha\beta}$ (2.111) seront

$$ F^{*\cdot 0}_{0\cdot} = \frac{1}{2c} v_k \, \varepsilon^{kpq} \left[H_{pq} + \frac{1}{c} \left(v_p E_q - v_q E_p \right) \right], \tag{2.126} $$

$$ \begin{aligned} F^{*\cdot 0}_{i\cdot} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \Bigg[& \varepsilon_{i\cdot}^{\cdot pq} H_{pq} + \frac{1}{c} \varepsilon_{i\cdot}^{\cdot pq} \left(v_p E_q - v_q E_p \right) - \\ & - \frac{1}{c^2} \varepsilon^{kpq} v_i v_k H_{pq} - \frac{1}{c^3} \varepsilon^{kpq} v_i v_k \left(v_p E_q - v_q E_p \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{2.127} $$

$$ F^{*0i} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \varepsilon^{ipq} \left[H_{pq} + \frac{1}{c} \left(v_p E_q - v_q E_p \right) \right], \tag{2.128} $$

$$F_{*0i} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{00}}\,\varepsilon_{ipq}H^{pq}, \tag{2.129}$$

$$F_{i.}^{*\cdot k} = \varepsilon_{i.}^{\cdot kp}E_p - \frac{1}{2c}\,v_i\,\varepsilon^{kpq}H_{pq} - \frac{1}{c^2}\,v_i v_m\,\varepsilon^{mkp}E_p\,, \tag{2.130}$$

$$F_{*ik} = \varepsilon_{ikp}\left(E^p - \frac{1}{c}\,v_q H^{pq}\right), \tag{2.131}$$

alors que son carré est

$$F_{*\alpha\beta}F^{*\alpha\beta} = \varepsilon^{ipq}\left(E_p H_{iq} - E_i H_{pq}\right), \tag{2.132}$$

où ε^{ipq} est le 3-tenseur discriminant chr.inv. (2.73, 2.74). Les projections chr.inv. du pseudo-tenseur $F^{*\alpha\beta}$ sont donc

$$\frac{\nabla_\sigma F_{0.}^{*\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial x^i} + H^{*i}\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\,E^{*ik}A_{ik}\,, \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma F^{*\sigma i} = \frac{{}^*\partial E^{*ik}}{\partial x^i} + E^{*ik}\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}\,F_k E^{*ik} - \\ - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial t} + DH^{*i}\right),\end{aligned} \tag{2.134}$$

ou, en utilisant les formules déterminant la divergence chr.inv. ${}^*\nabla_i H^{*i}$ et celle de la divergence physique chr.inv. ${}^*\widetilde{\nabla}_k E^{*ik}$, compte tenu de (2.119, 2.120), on obtient

$$\frac{\nabla_\sigma F_{0.}^{*\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = {}^*\nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c}\,E^{*ik}A_{ik}\,, \tag{2.135}$$

$$\nabla_\sigma F^{*\sigma i} = {}^*\widetilde{\nabla}_k E^{*ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial t} + DH^{*i}\right). \tag{2.136}$$

En dehors de la divergence de vecteurs, tenseurs antisymétriques, et pseudo-tenseurs de 2ème rang, nous devons définir les projections chr.inv. de la divergence d'un tenseur symétrique de 2ème rang (celles-ci seront nécessaires pour déduire les lois de conservation sous forme chr.inv.).

Nous reproduisons ici intégralement le calcul de Zelmanov [9]. Reprenant les notations de Zelmanov dans sa théorie, nous écrivons les projections chr.inv. d'un tenseur symétrique $T^{\alpha\beta}$ comme suit

$$\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho\,, \qquad \frac{T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = K^i, \qquad T^{ik} = N^{ik}, \tag{2.137}$$

selon [9], nous avons

$$\frac{\nabla_\sigma T_0^\sigma}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D + D_{ik}N^{ik} + c\,{}^*\nabla_i K^i - \frac{2}{c}\,F_i K^i, \tag{2.138}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\sigma i} = c\,\frac{{}^*\partial K^i}{\partial t} + c\,DK^i + 2c\left(D_k^i + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)K^k + \\ + c^2\,{}^*\nabla_k N^{ik} - F_k N^{ik} - \rho F^i.\end{aligned} \tag{2.139}$$

Parmi le produit (scalaire) intérieur d'un tenseur par l'opérateur de dérivation absolue ∇, qui est la divergence de ce champ de tenseurs, il est loisible de considérer la différence entre les dérivées covariantes du champ.

Une telle quantité est définie comme étant le *rotationnel* du champ, car géométriquement, il s'agit d'une rotation de type tourbillon de champ. Le *rotationnel absolu* est défini comme le rotationnel d'un champ de tenseurs à n dimensions dans un espace à n dimensions.

Le rotationnel d'un champ de tenseurs arbitraire à 4 dimensions A^α est un tenseur antisymétrique covariant du 2ème rang défini comme suit*

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,, \tag{2.140}$$

où $\nabla_\mu A_\nu$ est la dérivée absolue de A_α, par rapport à la coordonnée x^μ

$$\nabla_\mu A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} A_\sigma\,. \tag{2.141}$$

Contractant le rotationnel avec le 4-tenseur discriminant complètement antisymétrique $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ (2.65), on obtient le pseudo-tenseur

$$F^{*\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu\right) = E^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right). \tag{2.142}$$

En électrodynamique, $F_{\mu\nu}$ est le tenseur d'un champ électromagnétique (tenseur de Maxwell), qui est le rotationnel du 4-potentiel A^α de ce champ. Ultérieurement, nous aurons besoin des formules pour les projections chr.inv. du 4-rotationnel $F_{\mu\nu}$ et son pseudo-tenseur $F^{*\alpha\beta}$, exprimés au moyen des projections chr.inv. du 4-potentiel A^α (2.81), qui les composent.

Comme pour tout tenseur antisymétrique et compte tenu de $F_{00} = 0$

---

*Voir §98 dans l'ouvrage bien connu de Peter Raschewski [18]. En toute rigueur, le rotationnel n'est pas le tenseur (2.140), mais son pseudo-tenseur dual (2.142), car l'invariance par réflexion est obligatoire pour toute rotation.

et $F^{00}=0$, calculons les composantes du rotationnel $F_{\mu\nu}$

$$F_{0i}=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\frac{\varphi}{c^2}\,F_i-\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}-\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}\right), \tag{2.143}$$

$$\begin{aligned}F_{ik}&=\frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^k}-\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^i}+\frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k}-\frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right)+\\&+\frac{1}{c}\left(v_i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}-v_k\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\right)+\frac{1}{c^2}\left(v_i\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}-v_k\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{2.144}$$

$$F_{0\cdot}^{\cdot 0}=-\frac{\varphi}{c^3}\,v_kF^k+\frac{1}{c}\,v^k\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\right), \tag{2.145}$$

$$\begin{aligned}F_{k\cdot}^{\cdot 0}=-\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\Bigg[&\frac{\varphi}{c^2}\,F_k-\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}-\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}+\\&+\frac{2\varphi}{c^2}\,v^mA_{mk}+\frac{1}{c^2}\,v_kv^m\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m}+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right)-\\&-\frac{1}{c}\,v^m\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k}-\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right)-\frac{\varphi}{c^4}\,v_kv_mF^m\Bigg],\end{aligned} \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned}F_{k\cdot}^{\cdot i}=&\,h^{im}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k}-\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right)-\frac{1}{c}\,h^{im}v_k\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m}-\\&-\frac{1}{c^2}\,h^{im}v_k\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}+\frac{\varphi}{c^3}\,v_kF^i+\frac{2\varphi}{c}\,A_{k\cdot}^{\cdot i}\,,\end{aligned} \tag{2.147}$$

$$\begin{aligned}F^{0k}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\Bigg[&h^{km}\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m}+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right)-\frac{\varphi}{c^2}\,F^k+\\&+\frac{1}{c}\,v^nh^{mk}\left(\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}-\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}\right)-\frac{2\varphi}{c^2}\,v_mA^{mk}\Bigg],\end{aligned} \tag{2.148}$$

$$\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{g^{i\alpha}F_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}=h^{ik}\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\right)-\frac{\varphi}{c^2}\,F^i, \tag{2.149}$$

$$F^{ik}=g^{i\alpha}g^{k\beta}F_{\alpha\beta}=h^{im}h^{kn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}-\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right)-\frac{2\varphi}{c}\,A^{ik}, \tag{2.150}$$

où (2.149, 2.150) sont les projections chr.inv. du rotationnel $F_{\mu\nu}$. Les projections chr.inv. correspondantes de son pseudo-tenseur dual $F^{*\alpha\beta}$ s'écrivent

$$\frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{g_{0\alpha}F^{*\alpha i}}{\sqrt{g_{00}}}=\varepsilon^{ikm}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}-\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k}\right)-\frac{\varphi}{c}\,A_{km}\right], \tag{2.151}$$

$$F^{*ik} = \varepsilon^{ikm} \left(\frac{\varphi}{c^2} F_m - \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial q_m}{\partial t} \right), \tag{2.152}$$

où les $F_{0\cdot}^{*\cdot i} = g_{0\alpha} F^{*\alpha i} = g_{0\alpha} E^{\alpha i \mu\nu} F_{\mu\nu}$ peuvent être calculés en utilisant les composantes du rotationnel $F_{\mu\nu}$ déjà mentionnées (2.143–2.148).

§ 2.6 Opérateurs de Laplace et de d'Alembert

L'opérateur de Laplace est l'opérateur de dérivation tridimensionnel

$$\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2 = -g^{ik} \nabla_i \nabla_k \,. \tag{2.153}$$

Sa généralisation quadridimensionnelle dans un espace pseudo-riemannien est *l'opérateur covariant de d'Alembert*

$$\Box = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \,. \tag{2.154}$$

Dans l'espace de Minkowski, ces opérateurs prennent la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \,, \tag{2.155}$$

$$\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \,. \tag{2.156}$$

Notre but est maintenant d'appliquer l'opérateur de d'Alembert aux champs scalaire et vectoriel dans un espace pseudo-riemannien, et de les présenter sous forme chr.inv. En premier lieu, nous appliquerons l'opérateur de d'Alembert à un champ scalaire φ, car dans ce cas, les calculs sont considérablement simplifiés (les dérivées absolues d'un champ scalaire $\nabla_\alpha \varphi$ ne contiennent pas les symboles de Christoffel et se réduisent aux dérivées ordinaires)

$$\Box \varphi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \, \varphi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} \right) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \,. \tag{2.157}$$

Par conséquent, nous formulons les composantes du tenseur métrique fondamental en termes d'invariants chronométriques. Pour les g^{ik} (1.18), on obtient $g^{ik} = -h^{ik}$. Les composantes g^{0i} se déduisent de la vitesse linéaire de la rotation d'espace $v^i = -c\, g^{0i} \sqrt{g_{00}}$

$$g^{0i} = -\frac{1}{c\sqrt{g_{00}}} \, v^i. \tag{2.158}$$

Les composantes g^{00} peuvent elles être obtenues à partir de la propriété fondamentale du tenseur métrique $g_{\alpha\sigma} g^{\beta\sigma} = g_\alpha^\beta$. Posant $\alpha = \beta = 0$, il vient

$$g_{0\sigma} g^{0\sigma} = g_{00} g^{00} + g_{0i} g^{0i} = \delta_0^0 = 1, \tag{2.159}$$

puis compte tenu de

$$g_{00} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2, \qquad g_{0i} = -\frac{1}{c}\, v_i \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \tag{2.160}$$

on obtient la formule

$$g^{00} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\, v_i v^i\right), \qquad v_i v^i = h_{ik}\, v^i v^k = v^2. \tag{2.161}$$

Substituant les formules obtenues dans $\Box\varphi$ (2.157) et remplaçant les opérateurs de dérivation classiques par les opérateurs chr.inv., on obtient le dalembertien du champ scalaire sous forme chr.inv.

$$\Box\,\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^k} = {}^*\Box\,\varphi\,, \tag{2.162}$$

où contrairement aux opérateurs classiques, ${}^*\Box$ représente l'opérateur de d'Alembert chr.inv., et ${}^*\Delta$ est l'opérateur de Laplace chr.inv.

$${}^*\Box = \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\,, \tag{2.163}$$

$${}^*\Delta = -g^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k = h^{ik}\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\,. \tag{2.164}$$

Appliquons l'opérateur de d'Alembert à un champ de vecteurs quadridimensionnels arbitraire A^α

$$\Box A^\alpha = g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu\,A^\alpha. \tag{2.165}$$

Puisque $\Box A^\alpha$ est un 4-vecteur, les projections chr.inv. de ces quantités sont

$$T = b_\sigma\,\Box A^\sigma = b_\sigma\, g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu\,A^\sigma, \tag{2.166}$$

$$B^i = h^i_\sigma\,\Box A^\sigma = h^i_\sigma\, g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu\,A^\sigma. \tag{2.167}$$

En général, l'obtention du dalembertien sous forme chr.inv. d'un champ de vecteurs dans un espace pseudo-riemannien, est loin d'être un problème trivial, car les symboles de Christoffel ne s'annulant pas, les formules qui décrivent les projections des dérivées secondes peuvent faire l'objet de douzaines de pages*.

*C'est une des raisons pour laquelle les applications pratiques de la théorie électromagnétique sont la plupart du temps calculées dans un espace de Minkowski rapporté à un référentiel galiléen où les symboles de Christoffel sont nuls. En fait, le formalisme covariant permet difficilement d'interpréter sans ambiguïté les résultats de calcul, à moins pour ces derniers d'être formulés au moyen de quantités physiquement observables (invariants chronométriques), ou bien dans le cadre de cas particuliers comme celui de l'espace minkowskien.

Après un calcul assez laborieux, on obtient les formules requises pour les projections du dalembertien chr.inv. du champ de vecteurs A^α dans un espace pseudo-riemannien

$$\begin{aligned} T = {}^*\Box\varphi - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(F_k q^k\right) - \frac{1}{c^3}F_i\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \\ + h^{ik}\Delta^m_{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - h^{ik}\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left[\left(D_{kn}+A_{kn}\right)q^n\right] + \frac{D}{c^2}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} - \\ - \frac{1}{c}D^k_m\frac{{}^*\partial q^m}{\partial x^k} + \frac{2}{c^3}A_{ik}F^i q^k + \frac{\varphi}{c^4}F_iF^i - \frac{\varphi}{c^2}D_{mk}D^{mk} - \\ - \frac{D}{c^3}F_m q^m - \frac{1}{c}\Delta^m_{kn}D^k_m q^n + \frac{1}{c}h^{ik}\Delta^m_{ik}\left(D_{mn}+A_{mn}\right)q^n, \end{aligned} \tag{2.168}$$

$$\begin{aligned} B^i = {}^*\Box A^i + \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)q^k\right] + \frac{D}{c^2}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \\ + \frac{1}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\frac{{}^*\partial q^k}{\partial t} - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\varphi F^i\right) - \frac{1}{c^3}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \\ + \frac{1}{c^2}F^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c}\left(D^{mi} + A^{mi}\right)\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c^4}q^k F_k F^i + \\ + \frac{1}{c^2}\Delta^i_{km}q^m F^k - \frac{\varphi}{c^3}DF^i + \frac{D}{c^2}\left(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot}\right)q^n - \\ - h^{km}\left\{\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\Delta^i_{mn}q^n\right) + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left[\varphi\left(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot}\right)\right] + \right. \\ + \left(\Delta^i_{kn}\Delta^n_{mp} - \Delta^n_{km}\Delta^i_{np}\right)q^p + \frac{\varphi}{c}\left[\Delta^i_{kn}\left(D^n_m + A^{\cdot n}_{m\cdot}\right) - \right. \\ \left. \left. - \Delta^n_{km}\left(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot}\right)\right] + \Delta^i_{kn}\frac{{}^*\partial q^n}{\partial x^m} - \Delta^n_{km}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^n}\right\}, \end{aligned} \tag{2.169}$$

où ${}^*\Box\varphi$ et ${}^*\Box q^i$ résultent de l'application de l'opérateur de d'Alembert chr.inv. (2.163) aux quantités $\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}$ et $q^i = A^i$, qui sont les projections chr.inv. (composantes physiquement observables) du vecteur A^α

$${}^*\Box\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k}\,, \tag{2.170}$$

$${}^*\Box q^i = \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2} - h^{km}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial x^k\partial x^m}\,. \tag{2.171}$$

Le critère principal d'obtention de calculs corrects dans un cas aussi compliqué (les projections chr.inv. du dalembertien d'un champ de vecteurs conduisant aux formules 2.168 et 2.169), reste la règle d'invariance chronométrique de Zelmanov : "l'exactitude des calculs conduit à des

équations finales qui ne contiennent que des termes chronométriquement invariants".

Autrement dit, ces équations doivent impérativement consister en quantités chr.inv. avec leur dérivées chr.inv., tout en intégrant les propriétés chr.inv. de l'espace de référence. La moindre erreur au cours du calcul se traduira par des résultats non chronométriquement invariants. L'application de l'opérateur de d'Alembert nul ou non nul à un champ de tenseurs conduit à *l'équation de d'Alembert* pour ce champ. Du point de vue physique, il s'agit des équations de propagation des ondes du champ. Si le dalembertien n'est pas nul, nous sommes en présence d'équations de propagation d'ondes engendrées par une source. Par exemple, dans le cas électromagnétique, les sources du champ sont les charges électriques et les courants. Si le dalembertien est nul, les équations de propagation ne sont reliées à aucune source. En dehors du champ tensoriel, si le domaine d'espace-temps considéré est balayé par un autre milieu, celui-ci va entraîner l'apparition d'un terme supplémentaire dans les équations de d'Alembert, qui pourra par la suite s'obtenir à partir des équations le définissant.

§ 2.7 Conclusions

Nous sommes maintenant en mesure de rappeler et souligner les résultats majeurs de ce chapitre. En dehors de notre connaissance générale acquise dans le domaine de l'algèbre tensorielle, nous somme en possession de tous les outils nécessaires à la compréhension des prochains chapitres. L'annulation de la dérivée absolue du vecteur dynamique attaché à la particule dans la direction de son mouvement, fixe les équations dynamiques de cette particule. L'annulation de la divergence d'un champ de tenseurs fixe la condition de Lorentz et l'équation de continuité pour ce champ. L'annulation de la divergence d'un tenseur antisymétrique de 2ème rang (et de son pseudo-tenseur dual), fixe les équations de Maxwell. En appliquant le rotationnel d'un champ de vecteurs au champ électromagnétique, on obtient le tenseur de Maxwell. Les équations de d'Alembert pour un champ donné sont les équations de propagation des ondes de ce champ.

A partir de cette brève liste d'applications possibles, nous pourrons résoudre les problèmes liés aux opérateurs différentiels et aux tenseurs antisymétriques en utilisant d'emblée les modèles décrits dans ce chapitre.

Chapitre 3 Mouvement des particules chargées

§ 3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir la théorie du champ électromagnétique dans un 4-espace pseudo-riemannien. Celle-ci diffère toutefois de l'électrodynamique relativiste classique de par sa formulation sous forme chr.inv. (quantités physiquement observables).

Un champ électromagnétique est communément décrit dans l'espace pseudo-riemannien par un champ de vecteurs dérivant d'un 4-potentiel électromagnétique. Sa composante temporelle est le *potentiel scalaire* φ, tandis que les composantes spatiales forment le *potentiel vecteur* A^i. Dans les systèmes d'unités de Gauss ou CGES, le 4-potentiel A^α a les dimensions

$$A^\alpha \; [\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{s}^{-1}]. \tag{3.1}$$

Les composantes φ et A^i ont évidemment les mêmes dimensions. Par conséquent, l'étude du champ électromagnétique est substantiellement différente de celle des champs gravitationnels. Selon la théorie des invariants chronométriques, la force d'inertie gravitationnelle F^i et le potentiel de gravitation w (1.38) sont uniquement fonctions des propriétés géométriques de l'espace, alors que les champs électromagnétiques (issus du 4-potentiel A^α), n'ont à ce jour, fait l'objet d'aucune "géométrisation". Ces champs sont systématiquement introduits "extérieurement" à l'espace considéré.

Les équations classiques de l'électrodynamique (équations de Maxwell reliant les composantes électrique et magnétique du champ), ont été de fait déduites bien avant l'introduction de la relativité en Physique. Par la suite, ces équations ont pu être écrites dans le formalisme quadridimensionnel et riemannien finalisant ainsi l'électromagnétisme relativiste sous forme covariante acceptable, au détriment d'un aspect plus illustratif. Inversement, les équations de Maxwell dans le formalisme de Minkowski se réduisent à une représentation simple qui met en évidence la composante scalaire (temps), et les 3-composantes vectorielles (spatiales), car rapportées à un système galiléen. Les équations ainsi représentées sont par définition des quantité observables, mais dans

un espace pseudo-riemannien inhomogène, anisotrope, généralement courbe et soumis à des déformations, comparer les composantes vectorielles et scalaire du champ des équations covariantes devient, répétons le, un problème non trivial. En d'autres termes, la question se pose alors de savoir quelles sont les quantités de l'électrodynamique relativiste pouvant être considérées comme physiquement observables.

Dans un espace pseudo-riemannien, les équations de l'électrodynamique relativiste seront donc formulées à l'aide de composantes physiquement observables (projections chr.inv.) du champ électromagnétique, en tenant compte des propriétés observables de l'espace. Nous aborderons ce problème en appliquant l'appareil mathématique des invariants chronométriques, c'est-à-dire en projetant les quantités généralement covariantes sur les lignes de temps et sur la section spatiale d'un observateur physique. Par cette méthode, nous nous efforcerons d'étendre la notion d'observable à la théorie électromagnétique relativiste générale. Nous en déduirons ensuite les propriétés de l'électrodynamique classique dans le référentiel de l'observateur.

§ 3.2 Composantes observables du tenseur du champ électromagnétique. Les invariants du champ

Par définition, le tenseur d'un champ électromagnétique est le rotationnel de son 4-potentiel A^α. C'est le *tenseur de Maxwell*

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \,. \tag{3.2}$$

Il est aisé de voir qu'il s'agit de la généralisation covariante des notations tridimensionnelles de l'électrodynamique

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \,, \qquad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \,, \tag{3.3}$$

où $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont les vecteurs des deux composantes électrique et magnétique du champ. Ici, φ est le potentiel scalaire, $\vec{A}$ est le vecteur spatial du champ et

$$\vec{\nabla} = \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4}$$

est le 3-opérateur gradient de l'espace euclidien.

Au cours de ce paragraphe, nous allons d'abord déterminer les composantes du tenseur électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ physiquement observables dans le pseudo-riemannien considéré. Puis nous établirons une relation entre les quantités observables et les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$ du champ électromagnétique dans le cadre de l'électrodynamique classique. Ces

vecteurs seront également déterminés dans un espace pseudo-riemannien généralement inhomogène, anisotrope, courbe et en déformation.

Notons ici d'emblée la circonstance suivante : dans l'espace de Minkowski (espace de la relativité restreinte) rapporté à un système inertiel (mouvement rectiligne uniforme), la métrique est

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{3.5}$$

et les composantes du tenseur métrique sont

$$g_{00} = 1\,, \qquad g_{0i} = 0\,, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\,. \tag{3.6}$$

Dans ce cas, on ne distingue pas les composantes covariantes et contravariantes de A^α (les calculs minkowskiens sont de ce fait considérablement simplifiés)

$$\varphi = A_0 = A^0, \qquad A_i = -A^i. \tag{3.7}$$

Dans un espace pseudo-riemannien (ou généralement riemannien), cette distinction doit être faite en raison de la forme quelconque de la métrique. De ce fait, les potentiels scalaire et vectoriel du champ électromagnétique considérés ici, seront définis à partir des projections chr.inv. (composantes physiquement observables) du 4-potentiel A^α

$$\varphi = b^\alpha A_\alpha = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad q^i = h^i_\sigma A^\sigma = A^i. \tag{3.8}$$

Les autres composantes de A^α ne sont pas des quantités chr.inv. Elles sont définies avec φ et q^i de la façon suivante

$$A^0 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\Big(\varphi + \frac{1}{c}\,v_i q^i\Big)\,, \qquad A_i = -q_i - \frac{\varphi}{c}\,v_i\,. \tag{3.9}$$

En accord avec la théorie des invariants chronométriques, observons que le vecteur covariant chr.inv. q_i s'obtient à partir du vecteur contravariant chr.inv., q_i en abaissant l'indice à l'aide du tenseur métrique chr.inv. h_{ik}, comme suit $q_i = h_{ik}q^k$. Au contraire, le vecteur covariant classique A_i qui n'est pas une quantité chr.inv., s'obtient en abaissant l'indice à l'aide du tenseur métrique fondamental tel que $A_i = g_{i\alpha}A^\alpha$. Selon la formule générale donnant le carré d'un vecteur (2.39), le carré du potentiel A^α dans le référentiel d'accompagnement est

$$A_\alpha A^\alpha = g_{\alpha\beta}\,A^\alpha A^\beta = \varphi^2 - h_{ik}q^iq^k = \varphi^2 - q^2, \tag{3.10}$$

et la quantité est réelle si $\varphi^2 > q^2$, imaginaire is $\varphi^2 < q^2$; zéro (isotrope) si $\varphi^2 = q^2$.

A présent, utilisant les composantes du potentiel A^α (3.8, 3.9) dans la définition du tenseur électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ (3.2), nous formulerons les dérivées usuelles à l'aide des dérivées chr.inv. (1.33). A l'aide des formules des composantes du rotationnel d'un champ vectoriel arbitraire (2.148–2.150), on obtient les projections chr.inv. du tenseur $F_{\alpha\beta}$

$$\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g^{i\alpha}F_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = h^{ik}\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\right) - \frac{\varphi}{c^2}\,F^i, \tag{3.11}$$

$$F^{ik} = g^{i\alpha}g^{k\beta}F_{\alpha\beta} = h^{im}h^{kn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{2\varphi}{c}\,A^{ik}. \tag{3.12}$$

Nous définissons alors classiquement les projections du tenseur électromagnétique comme suit

$$E^i = \frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad H^{ik} = F^{ik}, \tag{3.13}$$

et les quantités covariantes chr.inv. (indice abaissé) sont alors

$$E_i = h_{ik}E^k = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i\,, \tag{3.14}$$

$$H_{ik} = h_{im}h_{kn}H^{mn} = \frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^i} - \frac{2\varphi}{c}\,A_{ik}\,, \tag{3.15}$$

tandis que les composantes mixtes $H_{k\cdot}^{\cdot m} = -H_{\cdot k}^{m\cdot}$ s'obtiennent à partir de H^{ik} en utilisant le tenseur métrique chr.inv., h_{ik} : $H_{k\cdot}^{\cdot m} = h_{ki}H^{im}$. Dans ce cas, le tenseur des déformations d'espace $D_{ik} = \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t}$ (1.40) est également implicitement présent dans la formule et apparaît lorsque les composantes satisfont $q_k = h_{km}q^m$ dans les dérivées temporelles.

Par ailleurs, nous pouvons exprimer les autres composantes du tenseur $F_{\alpha\beta}$ à l'aide des projections chr.inv. E^i et H^{ik} (3.11) en utilisant les formules se rapportant aux composantes d'un tenseur antisymétrique arbitraire (2.112–2.115). La validité de cette formule est vérifiée car l'équation généralisée (2.112–2.115) contient implicitement E^i et H^{ik} qu'ils soient les composantes d'un rotationnel ou celles de n'importe quel autre tenseur antisymétrique. Dans l'espace de Minkowski dépouillé d'accélération F^i, de rotation A_{ik} ou déformations D_{ik}, la formule qui donne E_i se réduit à

$$E_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\,, \tag{3.16}$$

ou en notations tridimensionnelles

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,, \tag{3.17}$$

qui au signe près, coïncide avec la formule pour $\vec{E}$ en électromagnétique classique.

Exprimons maintenant les vecteurs électrique et magnétique à l'aide du pseudo-tenseur $F^{*\alpha\beta}$, dual du tenseur de Maxwell de ce champ : $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$ (2.123). Donc en accord avec (2.124), les projections chr.inv. de ce pseudo-tenseur sont

$$H^{*i} = \frac{F^{*\cdot i}_{0\cdot}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad E^{*ik} = F^{*ik}. \tag{3.18}$$

Appliquant alors les formules des composantes d'un pseudo-tenseur arbitraire $F^{*\alpha\beta}$ obtenu au chapitre 2 (2.125–2.131), ainsi que celles pour E_i et H_{ik} (3.14, 3.15), on obtient les formules développées pour H^{*i} et E^{*ik}, c'est-à-dire

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c}\,A_{mn}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn} H_{mn}\,, \tag{3.19}$$

$$E^{*ik} = \varepsilon^{ikn}\left(\frac{\varphi}{c^2}\,F_n - \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^n} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_n}{\partial t}\right) = -\,\varepsilon^{ikn} E_k\,. \tag{3.20}$$

Il est alors facile de voir que les couples de tenseurs suivants sont conjugués duaux : H^{*i} et H_{mn}, E^{*ik} et E_m. Le pseudo-vecteur chr.inv. H^{*i} (3.19) inclut le terme

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left({}^*\nabla_n\, q_m - {}^*\nabla_m\, q_n\right), \tag{3.21}$$

qui représente le rotationnel chr.inv. du 3-vecteur q_m. Ici, nous aurons donc le tenseur

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\,\frac{2\varphi}{c}\,A_{mn} = \frac{2\varphi}{c}\,\Omega^{*i}, \tag{3.22}$$

où $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn} A_{mn}$ est le pseudo-vecteur chr.inv. des vitesses angulaires de rotation d'espace. Dans un espace de Minkowski rapporté à un référentiel galiléen (sans accélération, ni rotation ou déformation), la formule obtenue pour le 3-pseudo-vecteur magnétique chr.inv. H^{*i} (3.19) prend la forme

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m}\right). \tag{3.23}$$

On a en notations tridimensionnelles

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{3.24}$$

On voit donc que la structure d'un espace pseudo-riemannien va perturber les champs électromagnétiques en raison de la dépendance des vecteurs chr.inv. électrique E_i (3.14) et magnétique H^{*i} (3.19) vis-à-vis du potentiel gravitationnel et de la rotation de cet espace.

Ceci se vérifie également dans l'espace de Minkowski, si l'on envisage un système de référence non inertiel en rotation et en accélération, qui soit le référentiel de l'observateur. Cependant, dans ce même espace minkowskien, on peut toujours trouver un référentiel galiléen (ce qui est impossible dans un espace de type riemannien), car alors cet espace particulier n'induit ni accélération, ni rotation ou déformation dans le référentiel choisi. On comprend bien alors que dans l'espace de Minkowski, de tels effets soient purement relatifs.

En électrodynamique relativiste, nous introduisons des invariants qui caractérisent le champ électromagnétique considéré — c'est-à-dire les *invariants du champ*

$$J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2F_{0i}F^{0i} + F_{ik}F^{ik}, \tag{3.25}$$

$$J_2 = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = 2F_{0i}F^{*0i} + F_{ik}F^{*ik}. \tag{3.26}$$

Le premier invariant est un scalaire, alors que le second est un pseudo-scalaire. Exprimés à l'aide des composantes du tenseur du champ, on obtient

$$J_1 = H_{ik}H^{ik} - 2E_iE^i, \qquad J_2 = \varepsilon^{imn}\left(E_mH_{in} - E_iH_{nm}\right), \tag{3.27}$$

et utilisant les formules pour les composantes du pseudo-tenseur $F^{*\mu\nu}$ déduites au chapitre 2, nous écrivons les invariants du champ

$$J_1 = -2\left(E_iE^i - H_{*i}H^{*i}\right), \qquad J_2 = -4E_iH^{*i}. \tag{3.28}$$

Les quantités J_1 et J_2 étant elles-mêmes invariantes, nous en concluons que :

a) Si dans un référentiel donné, on a $E^2 = H^{*2}$, cette égalité est préservée dans tout autre système de référence ;

b) Si dans un référentiel donné, les vecteurs électrique et magnétique vérifient $E_iH^{*i} = 0$, cette orthogonalité est préservée dans tout autre système de référence.

Lorsque les conditions $E^2 = H^{*2}$ et $E_iH^{*i} = 0$ sont satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'un ou les deux invariants du champ (3.28) sont nuls, un champ électromagnétique est dit isotrope. Le terme "isotrope" ne doit pas être compris ici comme caractérisant le champ sur le cône de lumière, mais se rapporte à sa propriété de propagation dans toutes les directions du 3-espace (section spatiale).

On peut également formuler les invariants du champ électromagnétique à l'aide des dérivées chr.inv. du potentiel scalaire chr.inv. φ et du potentiel vecteur chr.inv. q^i (3.8), et ce, en tenant compte des propriétés chr.inv. de l'espace de référence de l'observateur. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} J_1 = 2\Bigg[& h^{im}h^{kn}\left(\frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^i}\right)\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - h^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} - \\ & - \frac{2}{c}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t} + \frac{8\varphi}{c^2}\,\Omega_i\Omega^i - \\ & - \frac{2\varphi}{c}\,\varepsilon^{imn}\Omega_m\frac{{}^*\partial q_i}{\partial x^n} + \frac{2\varphi}{c^2}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}F^i + \frac{2\varphi}{c^3}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}F^i - \frac{\varphi}{c^4}F_iF^i\Bigg], \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{4\varphi}{c}\,\Omega^{*i}\right]\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2}F_i\right). \tag{3.30}$$

Annulant les deux équations, on peut alors en déduire les conditions physiques inhérentes aux champs électromagnétiques isotropes. Ce faisant, on peut voir que les conditions d'égalité $E^2 = H^{*2}$, et d'orthogonalité $E_iH^{*i} = 0$ dans un espace pseudo-riemannien ne dépendent pas seulement des propriétés intrinsèques du champ (le potentiel scalaire φ et le potentiel vecteur q^i), mais également de l'accélération F^i, de la rotation A_{ik}, et des déformations D_{ik} de l'espace lui-même. En particulier les vecteurs E_i et H^{*i} sont orthogonaux, si l'espace est holonome $\Omega^{*i} = 0$, tandis que le champ spatial du potentiel vecteur q^i, est dépourvu de rotation $\varepsilon^{imn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^m} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^n}\right) = 0$.

§ 3.3 Les équations de Maxwell et leurs composantes observables. Conservation de la charge électrique. Condition de Lorentz

En électrodynamique classique, le champ électrique $\vec{E}$ $[\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-1}]$ est relié à son champ magnétique $\vec{H}$ $[\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-1}]$ par les *équations de Maxwell*, qui ont été initialement déduites par généralisation de données expérimentales. Vers le milieu du 19ème siècle, Maxwell démontra que si des champs et courants induisent un champ électromagnétique dans le vide, ce champ est entièrement décrit par deux groupes d'équations [20]

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ &\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.31a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ &\operatorname{div}\vec{H} = 0 \end{aligned}\right\} \text{II}\,, \tag{3.31b}$$

où ρ $[\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-3/2}\,\mathrm{s}^{-1}]$ est la densité de charge électrique (c'est-à-dire la quantité e $[\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}]$ de la charge dans un cm^3), et où $\vec{j}$ $[\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-2}]$ est le vecteur densité de courant. Les équations qui contiennent les sources du champ (ρ et $\vec{j}$) constituent le *1er groupe d'équations de Maxwell*, tandis que celles qui ne contiennent pas les sources, représentent le *2ème groupe d'équations de Maxwell.*

La première équation du premier groupe, est la loi de Biot-Savart, la seconde, correspond à la loi de Gauss, toutes deux exprimées sous forme différentielle. La première et la seconde équation des deux groupes, sont la traduction différentielle de la loi de Faraday de l'induction électromagnétique et montrent clairement qu'il est impossible d'isoler une charge magnétique. Au total, il existe 8 équations (4 vectorielles et 4 scalaires) avec 10 inconnues : trois composantes pour $\vec{E}$, trois composantes pour $\vec{H}$, trois composantes pour $\vec{j}$ et une composante pour ρ.

Les sources du champ ρ et $\vec{j}$ sont liées par la *loi de conservation de la charge*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0\,, \tag{3.32}$$

qui est la traduction mathématique de l'impossibilité de détruire une charge électrique, celle-ci se redistribuant au contact d'autres corps chargés.

Nous aurons ainsi un système de 9 équations et 10 inconnues, et donc une indétermination pour définir le champ et ses sources. La 10ème équation qui lève cette indétermination est la *condition de Lorentz* qui fixe les potentiels scalaire et vectoriel du champ :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0\,. \tag{3.33}$$

La condition de Lorentz est imposée de façon à fixer le potentiel scalaire φ et le potentiel vecteur $\vec{A}$, chacun reliés aux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ (3.3), et qui ne sont pas définis univoquement. $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont en effet inchangés si l'on remplace les potentiels par

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\Psi\,, \qquad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\,, \tag{3.34}$$

où Ψ est un scalaire arbitraire. Vis-à-vis de cette indétermination, seule la condition de Lorentz permet de conduire à établir l'équation des ondes pour le 4-potentiel A^α.

L'équation $\operatorname{div}\vec{H}=0$ (3.31) est entièrement vérifiée si $\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}$. Dans ce dernier cas, la première équation du premier groupe (3.11) s'écrit

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0\,, \tag{3.35}$$

dont la solution est

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,. \tag{3.36}$$

Substituant $\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}$ et $\vec{E}$ (3.36) dans le 1er groupe d'équations de Maxwell, on obtient

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,, \tag{3.37}$$

$$\Delta\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}\right)=-4\pi\rho\,, \tag{3.38}$$

où $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace habituel. Avec la condition de Lorentz (3.33), formons les potentiels φ et $\vec{A}$, il vient

$$\Box\varphi=-4\pi\rho\,, \tag{3.39}$$

$$\Box\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}\,, \tag{3.40}$$

où $\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ est l'opérateur de d'Alembert classique.

En appliquant ce dernier au champ, on obtient les équations d'onde pour ce champ (voir §2.6). De ce fait, le résultat obtenu implique que si la condition de Lorentz est appliquée, le 1er groupe des équations de Maxwell (3.31) est un système d'équations de propagation d'ondes pour les potentiels scalaire et vectoriel électromagnétique en présence de sources (charge et courant). Ces équations seront déduites au §3.4.

Nous allons donc maintenant considérer les équations de Maxwell, dans un espace pseudo-riemannien, sous forme chr.inv. c'est-à-dire formulées à l'aide de grandeurs physiquement observables. Dans un tel espace, la condition de Lorentz prend la forme covariante générale

$$\nabla_\sigma A^\sigma=\frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}A^\mu=0\,, \tag{3.41}$$

qui est la loi de conservation du 4-potentiel du champ électromagnétique considéré. La loi de conservation de la charge (*équation de continuité*) est

$$\nabla_\sigma j^\sigma=0\,, \tag{3.42}$$

où j^α est le *vecteur densité* de courant quadridimensionnel également appelé *courant de déplacement*. Les projections chr.inv. du vecteur courant j^α sont la densité de charge électrique

$$\rho = \frac{1}{c}\frac{j_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{3.43}$$

et la densité de courant spatiale j^i. Appliquant la formule chr.inv. de la divergence d'un vecteur arbitraire (2.107), on obtient la condition de Lorentz (3.41) sous forme chr.inv.

$$\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c}D + {}^*\nabla_i\, q^i - \frac{1}{c^2}\,F_i\, q^i = 0\,, \tag{3.44}$$

ainsi que l'équation de continuité chr.inv.

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D + {}^*\nabla_i\, j^i - \frac{1}{c^2}\,F_i\, j^i = 0\,. \tag{3.45}$$

Ici $D = h^{ik}D_{ik} = D^n_n = \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t}$ est la trace du tenseur des déformations d'espace (1.40). En fait, la trace ce tenseur représente le taux de dilatation relative de l'élément de volume de l'espace, tandis que ${}^*\nabla_i$ est l'opérateur de divergence chr.inv. (2.105).

Etant donné que F_i (1.38) contient la dérivée première du potentiel de gravitation $\mathrm{w} = c^2(1-\sqrt{g_{00}})$, le terme $\frac{1}{c^2}F_i q^i$ tient compte du fait que le temps s'écoule différemment suivant qu'il se mesure sur une paroi ou son opposée dans l'élément de volume considéré.

La formule citée pour la force d'inertie gravitationnelle F_i (1.38), prend aussi en compte la nature instationnaire de la rotation d'espace. Par ailleurs, les opérateurs de dérivation chr.inv. (1.33) étant

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\,v_i\,\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,, \tag{3.46}$$

la condition de conservation du champ vectoriel A^α, c'est-à-dire les équations (3.44, 3.45) dépendent étroitement du potentiel de gravitation et de la vitesse de rotation spatiale.

Les grandeurs chr.inv. $\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}$ et $\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}$ sont des variations temporelles observables pour les quantités chr.inv. φ et ρ.

En l'absence de forces d'inertie gravitationnelle, de rotation et déformations d'espace, les formules chr.inv. obtenues pour la condition de Lorentz (3.44) s'écrivent

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial q^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,q^i = 0\,, \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\, j^i = 0\,, \tag{3.48}$$

et pour un référentiel galiléen dans l'espace de Minkowski, elles deviennent

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial q^i}{\partial x^i} = 0\,, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0\,, \tag{3.49}$$

ou encore en notations vectorielles classiques

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0\,, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0\,, \tag{3.50}$$

qui coïncident donc avec les notations de la condition de Lorentz (3.33), et celles de la conservation de la charge (3.32) de l'électrodynamique classique.

Tournons nous à présent vers les équations de Maxwell dans un espace pseudo-riemannien, chaque paire d'équations s'écrivant dans le formalisme covariant

$$\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \qquad \nabla_\sigma F^{*\mu\sigma} = 0\,, \tag{3.51}$$

où $F^{\mu\sigma}$ est le tenseur électromagnétique covariant (indices supérieurs), $F^{*\mu\sigma}$ étant son pseudo-tenseur dual.

Utilisant les formules chr.inv. de la divergence d'un tenseur antisymétrique arbitraire de second rang (2.121, 2.122), et celles de son pseudo-tenseur dual (2.135, 2.136), on parvient aux équations de Maxwell

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\nabla_i E^i - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} = 4\pi\rho \\ &{}^*\nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + DE^i\right) = \frac{4\pi}{c}\, j^i \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.52}$$

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} = 0 \\ &{}^*\nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial H^{*i}}{\partial t} + DH^{*i}\right) = 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}\,. \tag{3.53}$$

Les équations de Maxwell écrites avec ces notations chr.inv., ont été obtenues pour la première fois par José del Prado et indépendamment par Nikolai Pavlov [25] (Zelmanov posa le problème à ses étudiants en leur expliquant la méthodologie).

Transformons à présent les équations de Maxwell chr.inv. de façon à ce qu'elles contiennent E^i et H^{*i} en tant qu'inconnues. A partir de

(2.125, 2.124, 2.111) nous calculons d'abord les équations

$$H_{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{imn} H^{mn}, \tag{3.54}$$

$$E^{*ik} = \varepsilon^{ikm}\left(\frac{\varphi}{c^2}\,F_m - \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_m}{\partial t}\right) = -\,\varepsilon^{ikm} E_m\,, \tag{3.55}$$

et en multipliant la première équation par ε^{ipq}, il vient

$$\varepsilon^{ipq} H_{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ipq}\varepsilon_{imn} H^{mn} = \frac{1}{2}\,(\delta^p_m \delta^q_n - \delta^q_m \delta^p_n)\,H^{mn} = H^{pq}. \tag{3.56}$$

Substituant $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ dans la première équation du premier groupe (3.52), celle-ci s'écrit

$${}^*\nabla_i\, E^i - \frac{2}{c}\,\Omega_{*m} H^{*m} = 4\pi\rho\,, \tag{3.57}$$

où $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn} A_{mn}$, est le pseudo-vecteur chr.inv. des vitesses angulaires de la rotation spatiale.

Substituant $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikm} E_m$ (3.55) dans la première équation du deuxième groupe (3.53), on obtient

$${}^*\nabla_i\, H^{*i} + \frac{2}{c}\,\Omega_{*m} E^m = 0\,. \tag{3.58}$$

Substituant à nouveau $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ dans la deuxième équation du deuxième groupe (3.53), il vient

$${}^*\nabla_k\big(\varepsilon^{mik} H_{*m}\big) - \frac{1}{c^2}\,F_k \varepsilon^{mik} H_{*m} - \frac{1}{c}\left(\frac{{}^*\partial E^i}{\partial t} + \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t}\,E^i\right) = \frac{4\pi}{c}\,j^i \tag{3.59}$$

et après multiplication des deux membres par $\sqrt{h}$ compte tenu de ${}^*\nabla_k\,\varepsilon^{mik} = 0$, la formule (3.59) s'écrit

$$\varepsilon^{ikm}\,{}^*\nabla_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big) - \frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{ikm} F_k H_{*m}\sqrt{h} - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(E^i\sqrt{h}\big) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h} \tag{3.60}$$

ou avec une notation différente

$$\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big) - \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,\big(E^i\sqrt{h}\big) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h}\,, \tag{3.61}$$

où $j^i\sqrt{h}$ est la 3-densité de courant spatial et ${}^*\widetilde{\nabla}_k = {}^*\nabla_k - \frac{1}{c^2}\,F_k$ est la divergence chr.inv. (2.106) qui tient compte du fait que le temps s'écoule différemment d'une paroi à l'autre de l'élément de volume.

L'équation obtenue (3.60) est la transcription chr.inv. de la loi de Biot-Savart dans l'espace pseudo-riemannien.

Substituant $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikm} E_m$ (3.55) dans la deuxième équation du deuxième groupe (3.53), et après des transformations similaires, on obtient

$$\varepsilon^{ikm}\, {}^*\widetilde{\nabla}_k \left(E_m \sqrt{h}\right) + \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial}{\partial t} \left(H^{*i} \sqrt{h}\right) = 0\,, \tag{3.62}$$

qui est la transcription chr.inv. de la loi d'induction électromagnétique de Faraday dans l'espace pseudo-riemannien.

Le système complet de 10 équations chr.inv. avec 10 inconnues (les deux groupes d'équations, la condition de Lorentz et l'équation de continuité) qui détermine un champ électromagnétique et ses sources dans l'espace pseudo-riemannien, s'écrit finalement

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\nabla_i E^i - \frac{2}{c}\, \Omega_{*m} H^{*m} = 4\pi\rho \\ &\varepsilon^{ikm}\, {}^*\widetilde{\nabla}_k \left(H_{*m} \sqrt{h}\right) - \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial}{\partial t} \left(E^i \sqrt{h}\right) = \frac{4\pi}{c}\, j^i \sqrt{h} \end{aligned}\right\} \text{ I}\,, \tag{3.63}$$

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\nabla_i H^{*i} + \frac{2}{c}\, \Omega_{*m} E^m = 0 \\ &\varepsilon^{ikm}\, {}^*\widetilde{\nabla}_k \left(E_m \sqrt{h}\right) + \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial}{\partial t} \left(H^{*i} \sqrt{h}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{II}\,, \tag{3.64}$$

$$\frac{1}{c} \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c}\, D + {}^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = 0 \quad \text{La condition de Lorentz,} \tag{3.65}$$

$$\frac{{}^*\partial \rho}{\partial t} + \rho D + {}^*\widetilde{\nabla}_i\, j^i = 0 \qquad \text{L'équation de continuité.} \tag{3.66}$$

Dans l'espace de Minkowski rapporté à un référentiel galiléen, le déterminant du tenseur métrique chr.inv. $\sqrt{h} = 1$, donc non soumis aux déformations $D_{ik} = 0$, aux rotations $\Omega_{*m} = 0$, ou accélération $F_i = 0$ de l'espace. De ce fait, les équations de Maxwell chr.inv. déduites en (3.63, 3.64) dans l'espace pseudo-riemannien de la relativité générale, nous conduisent directement aux équations de Maxwell usuelles écrites en notations tensorielles

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E^i}{\partial x^i} = 4\pi\rho \\ &e^{ikm} \left(\frac{\partial H_{*m}}{\partial x^k} - \frac{\partial H_{*k}}{\partial x^m}\right) - \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\, j^i \end{aligned}\right\} \text{ I}\,, \tag{3.67}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i} = 0 \\ &e^{ikm}\left(\frac{\partial E_m}{\partial x^k} - \frac{\partial E_k}{\partial x^m}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial H^{*i}}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{II}. \tag{3.68}$$

En notations tridimensionnelles, elles sont identiques aux équations de Maxwell classiques d'un 3-espace euclidien (3.31). Par ailleurs, les équations de Maxwell chr.inv. obtenues dans le cadre pseudo-riemannien (3.64), montrent qu'en l'absence de rotation spatiale, la divergence chr. inv. du champ magnétique est nulle ${}^*\nabla_i H^{*i} = 0$. En d'autres termes, la composante magnétique du champ est invariante si l'espace est holonome. Parallèlement, la divergence du champ électrique n'est pas nulle dans ce dernier cas : ${}^*\nabla_i E^i = 4\pi\rho$ (3.63), et donc la composante électrique est directement liée à la densité de charge ρ. Nous pouvons en déduire qu'une "charge magnétique", s'il elle existe, devrait être intimement liée au champ de rotation de l'espace lui-même.

§ 3.4 Les équations de d'Alembert pour le potentiel électromagnétique et leur composantes observables

Ainsi que nous l'avions précédemment souligné, l'opérateur de d'Alembert ou "dalembertien", appliqué à un champ, fournit une équation d'onde pour ce champ. Les équations dalembertiennes s'appliquent donc au potentiels scalaire φ et vectoriel $\vec{A}$.

La forme covariante générale de ces équations pour le 4-potentiel A^α a été obtenue par Stanyukovich [26] en utilisant le premier groupe des équations covariantes de Maxwell $\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ (3.51) sous la condition de Lorentz $\nabla_\sigma A^\sigma = 0$ (3.41)

$$\Box A^\alpha - R^\alpha_\beta A^\beta = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha, \tag{3.69}$$

où $R^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} R^\sigma_{\cdot\mu\beta\sigma}$ est le tenseur de Ricci, et $R^\alpha_{\cdot\mu\beta\sigma}$ est le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Le deuxième terme $R^\alpha_\beta A^\beta$ est absent si le tenseur de Ricci s'annule, et la métrique d'espace satisfait aux équations d'Einstein loin des masses. Dans ce cas, ce tenseur est négligeable, lorsque la courbure d'espace n'est pas significative. Par contre, ce problème doit tout de même être envisagé dans l'espace de Minkowski en présence d'accélérations et rotations. A l'approximation considérée, ces accélérations ou rotations peuvent en effet avoir certains effets sur la vitesse observable de propagation des ondes électromagnétiques.

La remarque précédente traduit ainsi une difficulté réelle, lorsqu'il s'agit d'établir les projections chr.inv. des équations dalembertiennes

dans leur complétude. De telles équations se révèleraient rapidement trop compliquées pour parvenir à des conclusions dépourvues d'ambiguités. Par conséquent, notre tâche se limitera à transcrire les équations dalembertiennes sous forme de tenseur chr.inv. pour un champ électromagnétique dans un cadre de référence non inertiel de l'espace minkowskien. Bien entendu, ces considérations ne s'appliquent pas à l'espace pseudo-riemannien qui fera l'objet du prochain paragraphe.

Calculant les projections chr.inv. des équations dalembertiennes

$$\Box A^\alpha = -\frac{4\pi}{c}\, j^\alpha \tag{3.70}$$

à partir des formules générales (2.168, 2.169), on obtient

$$\begin{aligned} {}^*\Box\varphi - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(F_k q^k\right) - \frac{1}{c^3}F_i\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + h^{ik}\Delta^m_{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - \\ - h^{ik}\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(A_{kn}q^n\right) + \frac{1}{c}h^{ik}\Delta^m_{ik}A_{mn}q^n = 4\pi\rho\,, \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} &{}^*\Box A^i + \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(A^{\cdot i}_{k\cdot}q^k\right) + \frac{1}{c^2}A^{\cdot i}_{k\cdot}\frac{{}^*\partial q^k}{\partial t} - \frac{1}{c^3}\frac{{}^*\partial\left(\varphi F^i\right)}{\partial t} - \\ &\quad - \frac{1}{c^3}F^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}F^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c}A^{mi}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c^2}\Delta^i_{km}q^m F^k - \\ &\quad - h^{km}\Bigg\{\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\Delta^i_{mn}q^n\right) + \frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\varphi A^{\cdot i}_{m\cdot}\right) + \\ &\quad + \left(\Delta^i_{kn}\Delta^n_{mp} - \Delta^n_{km}\Delta^i_{np}\right)q^p + \frac{\varphi}{c}\left(\Delta^i_{kn}A^{\cdot n}_{m\cdot} - \Delta^n_{km}A^{\cdot i}_{n\cdot}\right) + \\ &\quad + \Delta^i_{kn}\frac{{}^*\partial q^n}{\partial x^m} - \Delta^n_{km}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^n}\Bigg\} = \frac{4\pi}{c}\, j^i, \end{aligned} \tag{3.72}$$

où il a été tenu compte de la densité de charge observable $\rho = \frac{g_{0\alpha}\, j^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}$, dans l'espace dépourvu de déformations et considéré à l'approximation linéaire (en négligeant les termes d'ordre supérieur, et en supposant les champs gravitationnels et la rotation spatiale faibles).

Analysons maintenant ces résultats. En premier lieu, nous considérons les équations obtenues en (3.71, 3,72) rapportées à un référentiel galiléen de l'espace minkowskien. Ici, la métrique prend la forme (3.5) et donc le dalembertien chr.inv. ${}^*\Box$ (2.163) se réduit au dalembertien usuel ${}^*\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box$. Les équations obtenues en (3.71) et (3.72) seront alors

$$\Box\varphi = 4\pi\rho\,, \qquad \Box q^i = -\frac{4\pi}{c}\, j^i, \tag{3.73}$$

qui coïncident formellement avec les équations classiques de l'électrodynamique (3.39, 3.40).

Revenons aux équations dalembertiennes chr.inv. (3.71, 3.72). Par souci de simplification, les second termes du premier membre des équations (3.71) et (3.72) seront désignés respectivement par T et B^i. Développant la formule pour ${}^*\Box$ (2163), on obtient la forme

$$\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k\,\varphi = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.74}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2} - h^{mk}\,{}^*\nabla_m\,{}^*\nabla_k\,q^i = B^i + \frac{4\pi}{c}j^i, \tag{3.75}$$

où $h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k = {}^*\Delta$ est le laplacien chr.inv. Il est alors facile de voir que lorsque les potentiels φ et q^i sont stationnaires (indépendants du temps), les équations d'onde de d'Alembert se réduisent aux équations de Laplace

$${}^*\Delta\varphi = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.76}$$

$${}^*\Delta q^i = B^i + \frac{4\pi}{c}\,j^i, \tag{3.77}$$

qui caractérisent l'état stationnaire de ce champ.

Un champ est homogène suivant une direction si sa dérivée usuelle par rapport à cette direction est nulle.

Dans les espaces riemanniens, un champ est homogène lorsque ses dérivées covariantes sont nulles. Dans ce type d'espace, l'inhomogénéité observable d'un champ tensoriel considéré dans un son référentiel d'accompagnement, se caractérise par la différence de l'opérateur chr.inv. ${}^*\nabla_i$ pris au potentiel zéro [9, 11–13]. Autrement dit, si pour une grandeur scalaire A, la condition ${}^*\nabla_i\,A = 0$ est vérifiée, alors le champ A est *observé* comme étant homogène.

Par conséquent, le dalembertien chr.inv. ${}^*\Box$ est la différence entre les dérivées secondes de l'opérateur $\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t}$ inhérent au caractère non stationnaire du champ, et l'opérateur ${}^*\nabla_i$ caractérisant son inhomogénéité spatiale observable. Si le champ est homogène et stationnaire, alors les membres de gauche des équations d'onde (3.74, 3.75) sont nuls, et ce champ n'engendre aucune onde (champ non ondulatoire).

Dans un champ stationnaire inhomogène (${}^*\nabla_i \neq 0$, $\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial}{\partial t} = 0$), les équations dalembertiennes (3.74, 3.71) décrivent une onde stationnaire

$$-\,h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k\,\varphi = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.78}$$

$$-\,h^{mk}\,{}^*\nabla_m\,{}^*\nabla_k\,q^i = B^i + \frac{4\pi}{c}\,j^i. \tag{3.79}$$

Dans un champ homogène non stationnaire ($^*\nabla_i = 0$, $\frac{1}{c}\frac{^*\partial}{\partial t} \neq 0$), les équations dalembertiennes décrivent les variations temporelles du champ dépendant des sources (charge et courant)

$$\frac{1}{c^2}\frac{^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} = T + 4\pi\rho\,, \tag{3.80}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{^*\partial^2 q^i}{\partial t^2} = B^i + \frac{4\pi}{c}\,j^i. \tag{3.81}$$

Dans un système de référence inertiel (les symboles de Christoffel sont nuls), les dérivées covariantes se réduisent aux dérivées ordinaires, d'où $^*\nabla_i\,\varphi = \frac{^*\partial\varphi}{\partial x^i}$, et l'équation dalembertienne scalaire chr.inv. (3.74) devient

$$\frac{1}{c^2}\frac{^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{^*\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^k} = T + 4\pi\rho\,. \tag{3.82}$$

Ici, le premier membre prend une forme simplifiée qui facilite grandement son analyse. En physique mathématique, on sait d'après la théorie des oscillations que dans les équations dalembertiennes classiques

$$\Box\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g^{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k} \tag{3.83}$$

le terme a représente la valeur absolue de la 3-vitesse des oscillations qui s'étalent dans le champ φ.

En développant les coordonnées spatiales des dérivées chr.inv. (3.46), nous pouvons réécrire l'équation des ondes scalaires (3.82)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{2v^k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k\,\partial t} + \\ + \frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\,h^{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\,v^k F_k\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = T + 4\,\pi\rho\,,\end{aligned} \tag{3.84}$$

où $v^2 = h_{ik}v^i v^k$, et la dérivée seconde chr.inv. par rapport au temps, s'exprime à l'aide des dérivées usuelles

$$\frac{^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^3}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \tag{3.85}$$

Nous pouvons voir que le carré de la vitesse linéaire de la rotation spatiale v^2 a un effet prépondérant, tandis que le caractère non stationnaire du champ ($\frac{^*\partial\varphi}{\partial t}$) n'influence que très faiblement la propagation des ondes. Dans le cas limite où $v \to c$, le dalembertien se réduit au laplacien

et les équations de propagation d'ondes se réduisent aux équations stationnaires de Laplace. Aux faibles vitesses de rotation d'espace $v \ll c$, nous admettrons que les ondes électromagnétiques observables se propagent à la vitesse de la lumière.

Généralement, la valeur absolue de la vitesse observable des ondes du potentiel électromagnétique scalaire $\mathrm{v}_{(\varphi)}$ devient

$$\mathrm{v}_{(\varphi)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \,. \tag{3.86}$$

Il est évident que la grandeur chr.inv. (3.85) qui est l'accélération observable du potentiel scalaire φ, diffère substantiellement de son analogue en termes de coordonnées. Plus le potentiel de gravitation est élevé et plus grande sera la variation temporelle

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 \frac{{}^*\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \,. \tag{3.87}$$

Dans le cas ultime où $\mathrm{w} \to c^2$ (approchant le collapse gravitationnel à la surface d'un collapsar), l'accélération observable du potentiel scalaire devient infinitésimale, alors que l'accroissement du potentiel suivant $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ tend vers l'infini. Néanmoins, dans les conditions habituelles, il suffit de soumettre le potentiel $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ à de légères corrections en matière d'accélération et de vitesse d'accroissement du potentiel φ.

Tout ce que nous avons dit à propos de la grandeur scalaire chr.inv. $\frac{{}^*\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, est également valable pour le vecteur chr.inv. $\frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2}$, car l'opérateur dalembertien chr.inv. ${}^*\Box = \frac{1}{c^2} \frac{{}^*\partial^2}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$, diffère des fonctions scalaire et vectorielle correspondantes, uniquement par le second terme — l'opérateur laplacien dans lequel les dérivées chr.inv. des grandeurs scalaires et vectorielles diffèrent entre elles, c'est-à-dire

$${}^*\nabla_i \, \varphi = \frac{{}^*\partial \varphi}{\partial x^i} \,, \qquad {}^*\nabla_i \, q^k = \frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^i} + \Delta^k_{im} q^m. \tag{3.88}$$

Pour une rotation d'espace et un potentiel de gravitation tous deux infinitésimaux, le dalembertien chr.inv. pour le potentiel scalaire se réduit au dalembertien classique

$${}^*\Box \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \,, \tag{3.89}$$

et dans ce cas, les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière.

§ 3.5 La force de Lorentz. Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de déduire les projections chr.inv. (composantes physiquement observables) de la 4-force résultant de l'interaction charge électrique/champ électromagnétique dans un espace pseudo-riemannien. Nous résoudrons ce problème dans les deux cas précis suivants : a) pour une charge ponctuelle ; b) pour une charge étendue dans l'espace. En outre, nous pourrons en déduire les projections du tenseur d'énergie-impulsion pour un champ électromagnétique.

Rappelons que dans un espace euclidien tridimensionnel, le mouvement d'une particule chargée est donné par l'équation vectorielle

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\,\vec{u};\vec{H}\,\right], \tag{3.90}$$

où $\vec{p}=m\vec{u}$ est le 3-vecteur impulsion de la particule et m sa masse relativiste. On reconnaît dans le 2ème membre de cette équation, la *force de Lorentz*. L'équation qui rend compte de la variation de l'énergie cinétique (relativiste) de la particule

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.91}$$

correspondant au travail de déplacement fourni par le vecteur électrique du champ dans l'unité de temps, prend alors la forme vectorielle

$$\frac{dE}{dt} = e\vec{E}\,\vec{u}, \tag{3.92}$$

ce qui représente aussi le *théorème des forces vives*.

Dans le formalisme quadridimensionnel de Minkowski, les équations (3.90) et (3.92) s'écrivent dans un référentiel galiléen

$$m_0 c\,\frac{dU^\alpha}{ds} = \frac{e}{c}\,F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}U^\sigma, \qquad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\,. \tag{3.93}$$

Ce sont les *équations de Minkowski* ($F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}$ est le tenseur électromagnétique). La métrique étant ici diagonale (3.5)

$$ds = cdt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,, \qquad u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \tag{3.94}$$

et les composantes de la 4-vitesse U^α sont

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,, \qquad U^i = \frac{u^i}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,, \tag{3.95}$$

où $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ est la 3-vitesse des coordonnées. Les composantes de $\frac{e}{c} F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} U^\sigma$ rapportées au référentiel galiléen sont

$$\frac{e}{c} F^{0\cdot}_{\cdot\sigma} U^\sigma = -\frac{e}{c^2} \frac{E_i u^i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{3.96}$$

$$\frac{e}{c} F^{i\cdot}_{\cdot\sigma} U^\sigma = -\frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(eE^i + \frac{e}{c} e^{ikm} u_k H_{*m} \right). \tag{3.97}$$

Donc, dans ce système, les composantes temporelles et spatiales des équations minkowskiennes (3.93) s'écrivent

$$\frac{dE}{dt} = -eE_i u^i, \tag{3.98}$$

$$\frac{dp^i}{dt} = -\left(eE^i + \frac{e}{c} e^{ikm} u_k H_{*m} \right), \qquad p^i = mu^i. \tag{3.99}$$

Au signe près, les équations relativistes coïncident avec le théorème des forces vives, et les équations du mouvement d'une particule chargée en électromagnétique classique (3.90, 391). Notons que cette différence de signe au deuxième membre résulte du choix de la signature d'espace-temps $(+---)$, signe qui serait différent, en adoptant la signature $(-+++)$.

Considérons à présent ce problème dans l'espace pseudo-riemannien de la relativité générale. Dans cet espace, les projections chr.inv. du 4-vecteur impulsion $\Phi^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma} U^\sigma$ imparti à la particule chargée qui interagit avec le champ électromagnétique, s'écrivent :

$$T = \frac{e}{c} \frac{F_{0\sigma} U^\sigma}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{3.100}$$

$$B^i = \frac{e}{c} F^{i\cdot}_{\cdot\sigma} U^\sigma = \frac{e}{c} \left(F^{i\cdot}_{\cdot 0} U^0 + F^{i\cdot}_{\cdot k} U^k \right). \tag{3.101}$$

Compte tenu des composantes de U^α

$$U^0 = \frac{\frac{1}{c^2} v_i \mathrm{v}^i \pm 1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}, \qquad U^i = \frac{\mathrm{v}^i}{c\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}, \tag{3.102}$$

et des formules des composantes d'un rotationnel arbitraire (2.143–2.159), il vient

$$T = -\frac{e}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_i \right) \mathrm{v}^i, \tag{3.103}$$

$$B^i = -\frac{e}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left\{\pm\left(\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}+\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}-\frac{\varphi}{c^2}F_k\right)h^{ik}+\right.$$
$$\left.+\left[h^{im}h^{kn}\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n}-\frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right)-\frac{2\varphi}{c}A^{ik}\right]\mathrm{v}_k\right\}. \tag{3.104}$$

La grandeur scalaire chr.inv. T au terme $-\frac{1}{c^2}$ près, représente le travail fourni par le champ pour déplacer la charge e. La grandeur vectorielle chr.inv. B^i au terme $\frac{1}{c}$ près, représente une force non relativiste agissant sur la particule par l'intermédiaire du champ électromagnétique

$$\Phi^i = cB^i = -e\left(E^i+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\mathrm{v}_k\right), \tag{3.105}$$

et constitue la force de Lorentz observable.

Notons que le signe inverse provient du fait que dans l'espace pseudo-riemannien, l'équation quadratique par rapport à $\frac{dt}{d\tau}$ possède deux racines (1.55). Le signe "plus" de la force de Lorentz rend compte de l'orientation du mouvement de la particule vers le futur (par rapport à l'observateur), tandis que le signe "moins" traduit le mouvement dans le passé.

Dans un référentiel galiléen de l'espace minkowskien, le temps physiquement observable τ ne peut être distingué de la coordonnée temporelle t. Manifestement, ce signe alterné ne s'applique plus à la force de Lorentz (3.99) déduite des équations minkowskiennes.

Si la charge n'est plus ponctuelle mais spatialement étendue, la force de Lorentz $\Phi^\alpha = \frac{e}{c}F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}U^\sigma$ des équations minkowskiennes (3.93) doit être remplacée par le 4-vecteur de la *densité de force de Lorentz*

$$f^\alpha = \frac{1}{c}\,F^{\alpha\cdot}_{\cdot\sigma}\,j^\sigma, \tag{3.106}$$

où la 4-densité de courant $j^\sigma = \{c\rho;\, j^i\}$ est définie par le 1er groupe d'équations de Maxwell (3.51)

$$j^\sigma = \frac{c}{4\pi}\,\nabla_\mu F^{\sigma\mu}. \tag{3.107}$$

Les projections chr.inv. de la densité de force de Lorentz f^α sont

$$\frac{f_0}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{1}{c}\,E_i\,j^i, \tag{3.108}$$

$$f^i = -\left(\rho E^i+\frac{1}{c}\,H^{i\cdot}_{\cdot k}\,j^k\right) = -\left(\rho E^i+\frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\,j_k\right). \tag{3.109}$$

Dans un espace euclidien à 3 dimensions les projections sont

$$\frac{f_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{q}{c} = \frac{1}{c}\,\vec{E}\,\vec{j}\,, \tag{3.110}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\,\vec{j};\vec{H}\,\right], \tag{3.111}$$

où q est la densité de puissance calorifique dissipée dans un conducteur chargé.

Nous allons maintenant exprimer la densité de force de Lorentz (3.106) à l'aide des équations de Maxwell. Substituant j^σ (3.107), il vient

$$f_\nu = \frac{1}{c}F_{\nu\sigma}j^\sigma = \frac{1}{4\pi}F_{\nu\sigma}\nabla_\mu F^{\sigma\mu} = \frac{1}{4\pi}\Big[\nabla_\mu\left(F_{\nu\sigma}F^{\sigma\mu}\right) - F^{\sigma\mu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma}\Big]. \tag{3.112}$$

Interchangeant les indices muets μ et σ, et compte tenu de l'antisymétrie du tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta}$, on trouve le second tenseur sous la forme

$$\begin{aligned} F^{\sigma\mu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}\,F^{\sigma\mu}\left(\nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma F_{\mu\nu}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\,F^{\sigma\mu}\nabla_\nu F_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}\,F^{\sigma\mu}\nabla_\nu F_{\sigma\mu}\,. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Il en résulte pour f_ν (3.112) et sa composante contravariante

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi}\,\nabla_\mu\left(-F^{\mu\sigma}F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\,\delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \tag{3.114}$$

$$f^\nu = \nabla_\mu\left[\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\sigma}F^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma} + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{3.115}$$

En notant le terme

$$\frac{1}{4\pi}\left(-\,F^{\mu\sigma}F^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma} + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = T^{\mu\nu}, \tag{3.116}$$

on obtient l'expression

$$f^\nu = \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{3.117}$$

Donc, le 4-vecteur de la densité de force de Lorentz f^ν est égal à la divergence d'une certaine quantité $T^{\mu\nu}$, qui représente le *tenseur d'énergie-impulsion* du champ électromagnétique. Ce tenseur est symétrique $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, et sa trace est nulle (en se rappelant que la trace du

tenseur métrique fondamental est $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=\delta^{\nu}_{\nu}=4$)

$$T^{\nu}_{\nu}=g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}+\frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)= \\ =\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}+F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)=0\,. \tag{3.118}$$

Les projections chr.inv. du tenseur d'énergie-impulsion sont

$$q=\frac{T_{00}}{g_{00}}\,,\qquad J^i=\frac{c\,T^i_0}{\sqrt{g_{00}}}\,,\qquad U^{ik}=c^2T^{ik}, \tag{3.119}$$

où le scalaire chr.inv. q est la *densité observable du champ*, le vecteur chr.inv. J^i est la *densité observable de l'impulsion* du champ, et le tenseur chr.inv. U^{ik} est la *densité observable du flux d'impulsion*. Pour le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique (3.116), on obtient l'expression

$$q=\frac{E^2+H^{*2}}{8\pi}\,, \tag{3.120}$$

$$J^i=\frac{c}{4\pi}\,\varepsilon^{ikm}E_kH_{*m}\,, \tag{3.121}$$

$$U^{ik}=qc^2h^{ik}-\frac{c^2}{4\pi}\left(E^iE^k+H^{*i}H^{*k}\right), \tag{3.122}$$

où $E^2=h_{ik}E^iE^k$ et $H^{*2}=h_{ik}H^{*i}H^{*k}$. Comparant la formule obtenue pour q (3.120), avec celle de la densité d'énergie du champ électromagnétique en électrodynamique classique, nous aurons

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,, \tag{3.123}$$

avec $E^2=(\vec{E};\vec{E})$ et $H^2=(\vec{H};\vec{H})$ d'où l'on voit que la grandeur chr.inv. q est la *densité d'énergie observable* du champ électrodynamique dans l'espace pseudo-riemannien. Comparant alors la formule obtenue pour le vecteur chr.inv. J^i (3.121) avec celle du vecteur de Poynting en théorie classique

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E};\vec{H}\right), \tag{3.124}$$

on voit alors clairement que J^i est le *vecteur de Poynting observable* dans l'espace pseudo-riemannien. La même correspondance peut être établie entre la 3ème observable U^{ik} (3.122) et sa grandeur en électrodynamique classique, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, qui définit le 3-tenseur des contraintes dans un élément de volume de ce milieu.

Par conséquent, U^{ik} est le *tenseur des contraintes observable* du champ électromagnétique dans l'espace pseudo-riemannien.

Il est maintenant possible de calculer les identités pour les projections chr.inv. de la densité de force de Lorentz (3.108, 3.109) en les formulant à l'aide des composantes chr.inv. du tenseur d'énergie-impulsion de ce champ (3.120–3.122). A partir de l'équation $f^\nu = \nabla_\mu T^{\mu\nu}$, et en utilisant la formule déjà écrite pour les composantes chr.inv. de la divergence absolue d'un tenseur symétrique arbitraire de 2ème rang (2.138, 2.139), on obtient

$$\frac{{}^*\partial q}{\partial t} + qD + \frac{1}{c^2}\, D_{ij} U^{ij} + {}^*\widetilde{\nabla}_i\, J^i - \frac{1}{c^2}\, F_i J^i = -\frac{1}{c}\, E_i\, j^i, \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^*\partial J^k}{\partial t} + DJ^k + 2\left(D_i^k + A_{\cdot i}^{k\cdot}\right) J^i + {}^*\widetilde{\nabla}_i\, U^{ik} - qF^k = \\ = -\left(\rho E^k + \frac{1}{c}\, \varepsilon^{kim} H_{*i}\, j_m\right). \end{aligned} \tag{3.126}$$

La première identité chr.inv. (3.125) montre que si le vecteur observable de la densité de courant j^i est orthogonal au vecteur électrique observable E^i, le premier membre est nul. Généralement, dans le cas d'une orientation arbitraire des vecteurs j^i et E^i, la variation observable de la densité du champ électromagnétique par rapport au temps (la quantité $\frac{{}^*\partial q}{\partial t}$) va dépendre de plusieurs facteurs :

a) La variation du volume d'espace observable balayé par un champ électromagnétique (terme qD) ;

b) L'effet des forces de déformations d'espace (terme $D_{ij}U^{ij}$) ;

c) L'effet de la force d'inertie gravitationnelle sur la densité d'impulsion du champ électromagnétique (terme $F_i J^i$) ;

d) La variation spatiale observable (divergence physique) de la densité d'impulsion du champ électromagnétique (le terme ${}^*\widetilde{\nabla}_i\, J^i$) ;

e) La grandeurs et l'orientation mutuelle du vecteur densité de courant j^i et du vecteur électrique E^i (membre de droite).

La deuxième identité chr.inv. (3.126) montre que la variation observable de la densité d'impulsion du champ électromagnétique par rapport au temps ($\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t}$), dépend des facteurs suivants :

a) Les variations du volume d'espace observable balayé par un champ électromagnétique (le terme DJ^k) ;

b) Les forces de déformation de l'espace et les forces de Coriolis, qui sont désignées par le terme $2\left(D_i^k + A_{\cdot i}^{k\cdot}\right) J^i$;

c) L'effet de la force d'inertie gravitationnelle sur la densité du champ électromagnétique observable (le terme qF^k) ;

d) La variation spatiale observable des contraintes du champ ${}^*\widetilde{\nabla}_i U^{ik}$;

e) L'effet de la densité de force de Lorentz observable — le membre de droite, défini par la quantité $f^k = -\big(\rho E^k + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{kim} H_{*i}\, j_m\big)$.

Pour conclure, nous envisageons ici un cas particulier, où le champ électromagnétique est isotrope. Une définition formelle des champs isotropes construits à partir du tenseur de Maxwell [20], est un ensemble de deux conditions

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0\,, \qquad F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = 0\,, \tag{3.127}$$

qui implique que les deux invariants du champ $J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ et $J_2 = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$ (3.25, 3.26) soient nuls. En notations chr.inv., compte tenu de (3.28), les conditions prennent la forme

$$E^2 = H^{*2}, \qquad E_i H^{*i} = 0\,. \tag{3.128}$$

Dans un espace pseudo-riemannien, nous voyons qu'un champ électromagnétique est observé comme étant isotrope, si les longueurs observables des vecteurs champ électrique et champ magnétique sont égales, tandis que le vecteur de Poynting J^i exprimé au moyen de (3.121), sécrit

$$J^i = \frac{c}{4\pi}\,\varepsilon^{ikm} E_k H_{*m}\,. \tag{3.129}$$

En termes de composantes chr.inv. du tenseur d'énergie-impulsion (3.120, 3121), on voit que les conditions obtenues (3.128) impliquent aussi

$$J = cq\,, \tag{3.130}$$

où $J = \sqrt{J^2}$ et $J^2 = h_{ik}J^iJ^k$. En d'autres termes, la longueur J du vecteur densité d'impulsion chr.inv. d'un champ électromagnétique isotrope, dépend uniquement de la densité du champ q.

§ 3.6 Equations du mouvement d'une particule chargée par la méthode du transport parallèle

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'obtenir les équations du mouvement chr.inv. d'une particule d'épreuve massive chargée et interagissant avec un champ électromagnétique dans un espace pseudo-riemannien*.

Celles-ci sont les projections chr.inv. des équations traduisant le

*En général, si l'on utilise les méthodes décrites ici, on peut obtenir des équations du mouvement pour une particule qui ne soit pas une particule d'épreuve : rappelons qu'une particule d'épreuve est caractérisée par une charge et une masse suffisamment négligeables pour ne pas influencer les champs électromagnétique et gravitationnel.

transport parallèle du 4-vecteur global

$$Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2}\, A^\alpha, \tag{3.131}$$

où $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ est le 4-vecteur impulsion de la particule, et où $\frac{e}{c^2}\, A^\alpha$ est un supplément d'impulsion dû à l'interaction particule chargée/champ électromagnétique, qui rend le mouvement de celle-ci non géodésique. Etant donné l'énoncé du problème, le transport parallèle d'une superposition de l'impulsion non géodésique de la particule et le vecteur dévié est aussi géodésique, selon

$$\frac{d}{ds}\left(P^\alpha + \frac{e}{c^2}\, A^\alpha\right) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left(P^\mu + \frac{e}{c^2}\, A^\mu\right)\frac{dx^\nu}{ds} = 0\,. \tag{3.132}$$

Par définition, une ligne géodésique est dite *ligne de direction constante*, dont le vecteur tangent en chaque point de celle-ci, restera tangent le long de la ligne qui est soumise au transport parallèle [9].

Les équations du mouvement peuvent s'obtenir d'une manière différente, plus précisément en considérant un mouvement le long d'une ligne extrémale, par application du principe de moindre action.

Les lignes extrémales sont aussi des lignes de direction constante. Par contre, dans des espaces non métriques par exemple, les longueurs ne sont pas définissables en catégories. De ce fait, les lignes extrémales ne sont jamais définies et le principe de moindre action ne peut plus être appliqué.

Néanmoins, dans un espace non métrique, on peut toujours définir des lignes de direction constante dont le paramètre de dérivation est non nul. Il en résulte que dans les espaces métriques qui englobent les espaces riemanniens, les lignes extrémales ne sont simplement qu'un cas particulier des lignes de direction constante.

En accord avec les formules générales obtenues au chapitre 2, les projections chr.inv. des équations du transport parallèle (3.132) s'écrivent ainsi

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} + \frac{1}{c}\left(-F_i\, \tilde{q}^i\, \frac{d\tau}{ds} + D_{ik}\, \tilde{q}^i\, \frac{dx^k}{ds}\right) = 0\,, \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}^i}{ds} + \left(\frac{\tilde{\varphi}}{c}\frac{dx^k}{ds} + \tilde{q}^k\, \frac{d\tau}{ds}\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \\ - \frac{\tilde{\varphi}}{c}\, F^i\, \frac{d\tau}{ds} + \Delta^i_{mk}\, \tilde{q}^m\, \frac{dx^k}{ds} = 0\,, \end{aligned} \tag{3.134}$$

où l'intervalle d'espace-temps s est ici le paramètre de dérivation le long de la trajectoire, $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{q}^i$ étant les projections chr.inv. du vecteur

dynamique Q^α (3.131) de cette particule

$$\tilde{\varphi} = b_\alpha Q^\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(P_0 + \frac{e}{c^2}\,A_0\right), \tag{3.135}$$

$$\tilde{q}^i = h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i = P^i + \frac{e}{c^2}\,A^i. \tag{3.136}$$

Les projections chr.inv. du vecteur impulsion sont

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\, m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\,m\mathrm{v}^i = \frac{1}{c}\,p^i, \tag{3.137}$$

où le "plus" va représenter les mouvements vers le futur (par rapport à l'observateur), tandis que le "moins" apparaît si la particule retourne dans le passé, et où $p^i = m\frac{dx^i}{d\tau}$ est le 3-vecteur impulsion chr.inv. de la particule. Quant aux projections chr.inv. de l'impulsion supplémentaire $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, elles s'écrivent

$$\frac{e}{c^2}\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{e}{c^2}\,\varphi\,, \qquad \frac{e}{c^2}\,A^i = \frac{e}{c^2}\,q^i, \tag{3.138}$$

où φ est le potentiel scalaire et q^i est le potentiel vecteur inhérents au champ électromagnétique — ceux-ci sont les composantes chr.inv. du 4-potentiel A^α (3.8). Les quantités $\tilde{\varphi}$ (3.135) et $\tilde{q}^i$ (3.136), qui sont les projections chr.inv. du vecteur global Q^α, prennent alors la forme

$$\tilde{\varphi} = \pm\, m + \frac{e}{c^2}\,\varphi\,, \tag{3.139}$$

$$\tilde{q}^i = \frac{1}{c}\left(p^i + \frac{e}{c^2}\,q^i\right). \tag{3.140}$$

Substituons à présent les quantités $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{q}^i$ dans les formules générales des équations du mouvement chr.inv. (3.133, 3.134). En déplaçant à droite les termes qui caractérisent l'interaction, nous parvenons aux équations chr.inv. du mouvement pour la particule chargée associée à notre Univers (particule se déplaçant vers le futur par rapport à un observateur usuel)

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}D_{ik}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c^3}\left(F_i q^i - D_{ik}\,q^i\mathrm{v}^k\right), \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &= -\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c}\left(\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k + q^k\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) + \frac{e\varphi}{c^2}F^i - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}\,q^n\mathrm{v}^k.\end{aligned} \tag{3.142}$$

Dans l'Univers miroir, les équations pour la particule correspondante se déplaçant dans le passé par rapport à l'observateur, s'écrivent

$$-\frac{dm}{d\tau}-\frac{m}{c^2}F_i\mathrm{v}^i+\frac{m}{c^2}D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k=-\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{e}{c^3}\left(F_i\,q^i-D_{ik}q^i\mathrm{v}^k\right), \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau}+mF^i+m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=\\&=-\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau}-\frac{e}{c}\left(\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k+q^k\right)\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)+\frac{e\varphi}{c^2}\,F^i-\frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}\,q^n\mathrm{v}^k.\end{aligned} \quad (3.144)$$

Ainsi que nous le constatons, le membre de gauche des équation coïncide formellement avec celui des équations chr.inv. du mouvement de cette particule, à condition que celle-ci soit libre. La seule différence est la présence dans l'équation, de termes qui traduisent un mouvement non géodésique.

Par conséquent, ici les membres de droite sont non nuls : ils rendent compte de l'effet que produit le champ électromagnétique sur la particule, lui-même également soumis aux propriétés physiques et géométriques (F^i, A_{ik}, D_{ik}, Δ^i_{nk}). Si la particule est neutre, $e=0$, les membres de droite s'annulent tous, et les équations coïncident alors avec les équations chr.inv. du mouvement d'une particule massive libre (voir formules 1.51, 1.52, et aussi 1.56, 1.57). Examinons les membres à droite en détail.

Les équations obtenues sont absolument symétriques par rapport aux mouvements vers le futur ou dans le passé, et elles changent de signe dès que le signe des charges s'inverse.

Notons T les membres de droite des équations scalaires du mouvement (3.141, 3.143). Notons M^i les membres de droite des équations vectorielles du mouvement (3.142, 3.144).

En utilisant les formules du vecteur champ électrique covariant E_i (3.14), on peut représenter T de la façon suivante

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{v}^i\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i}\,, \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned}T=&-\frac{e}{c^2}\,E_i\mathrm{v}^i-\frac{e}{c^2}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}+\\&+\frac{e}{c^3}\left(\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t}-D_{ik}q^k\right)\mathrm{v}^i+\frac{e}{c^3}\left(q^i-\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i\right)F_i\,.\end{aligned} \quad (3.146)$$

Substituons cette formule dans (3.141–3.143), et multipliant les résultats par c^2, on obtient l'équation pour l'énergie relativiste $E=\pm mc^2$

de la particule chargée qui se déplace vers le futur ou dans le passé

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\tau} - mF_i\mathrm{v}^i + mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -eE_i\mathrm{v}^i - e\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \\ + \frac{e}{c}\left(\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - D_{ik}q^k\right)\mathrm{v}^i + \frac{e}{c}\left(q^i - \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i\right)F_i\,,\end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned}-\frac{dE}{d\tau} - mF_i\mathrm{v}^i + mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -eE_i\mathrm{v}^i - e\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \\ + \frac{e}{c}\left(\frac{{}^*\partial q_i}{\partial t} - D_{ik}q^k\right)\mathrm{v}^i + \frac{e}{c}\left(q^i - \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i\right)F_i\,,\end{aligned} \tag{3.148}$$

où $eE_i\mathrm{v}^i$ ivi est le travail effectué par la composante électrique du champ pour déplacer la particule dans l'unité de temps.

Les équations scalaires chr.inv. du mouvement d'une particule chargée (3.147, 3.148) forment le *théorème des forces vives* sous forme chr.inv. dans l'espace pseudo-riemannien. Dans un référentiel galiléen, il est facile de voir que l'équation scalaire de la particule se déplaçant vers le futur (3.147), coïncide avec la composante temporelle des équations minkowskiennes (3.98). Dans un espace euclidien tridimensionnel, l'équation (3.147) se confond avec le théorème des forces vives de l'électrodynamique classique qui est $\frac{dE}{dt} = e\vec{E}\vec{u}$ (3.92).

Examinons à présent les termes de droite des équations vectorielles chr.inv. (3.142, 3.144), que nous noterons M^i. Comme

$$\frac{dq^i}{d\tau} = \frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k}\,, \tag{3.149}$$

et compte tenu de $\frac{{}^*\partial h^{ik}}{\partial t} = -2D^{ik}$ (1.40)

$$\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} = \frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(h^{ik}q_k\right) = -2D^i_k q^k + h^{ik}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t}\,, \tag{3.150}$$

M^i prend alors la forme

$$\begin{aligned}M^i = -\frac{e}{c}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t} + \frac{e\varphi}{c^2}\left(F^i + A^{ik}\mathrm{v}_k\right) + \frac{e}{c}A^{ik}q_k + \\ + \frac{e}{c}\left(q^k - \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k - \frac{e}{c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k.\end{aligned} \tag{3.151}$$

A l'aide des formules des composantes chr.inv. E^i (3.11) et H^{ik} (3.12) du tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta}$, on peut écrire les deux premiers termes de M^i (3.151) et le troisième terme, comme suit

$$-\frac{e}{c}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial q_k}{\partial t} + \frac{e\varphi}{c^2}\,F^i = -\,eE^i + eh^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k}\,, \tag{3.152}$$

$$\frac{e\varphi}{c^2}\,A^{ik}\mathrm{v}_k = \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^n\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{e}{2c}\,H^{ik}\mathrm{v}_k\,. \tag{3.153}$$

Sachant que $H^{ik} = \varepsilon^{mik}H_{*m}$ (3.56), on obtient

$$\frac{e\varphi}{c^2}\,A^{ik}\mathrm{v}_k = \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^n\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{e}{2c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\mathrm{v}_k\,, \tag{3.154}$$

$$\begin{aligned} M^i = -e\left(E^i + \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right) + \frac{e}{c}\left(q^k - \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k + \\ + eh^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{e}{c}\,A^{ik}q_k + \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^k\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right) - \\ - \frac{e}{c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k, \end{aligned} \tag{3.155}$$

et la somme des trois derniers termes dans M^i est

$$\begin{aligned} \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^k\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial q_k}{\partial x^m}\right) - \frac{e}{c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}q^n\mathrm{v}^k = \\ = -\frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m} - \frac{e}{2c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{2c}\,h^{im}q^n\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^n}\,. \end{aligned} \tag{3.156}$$

Enfin, les équations vectorielles chr.inv. du mouvement (3.142, 3.144) se déplaçant respectivement vers le futur et dans le passé, sont

$$\begin{aligned} \frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -e\left(E^i + \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right) + \\ + \frac{e}{c}\left(q^k - \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k + eh^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{e}{c}\,A^{ik}q_k - \\ - \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m} - \frac{e}{2c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{2c}\,h^{im}q^n\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^n}\,, \end{aligned} \tag{3.157a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -e\left(E^i + \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right) + \\ + \frac{e}{c}\left(q^k - \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k\right)D^i_k + eh^{ik}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{e}{c}\,A^{ik}q_k - \\ - \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m} - \frac{e}{2c}\,\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{2c}\,h^{im}q^n\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^n}\,. \end{aligned} \tag{3.157b}$$

Remarquons ici que le premier terme $-e\big(E^i + \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$ présent dans les membres de droite, diffère de la force de Lorentz chr.inv. qui est $\Phi^i = -e\big(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$, par le coefficient $\frac{1}{2}$ devant le terme se rapportant à la composante magnétique de la force. Cette circonstance est d'autant plus surprenante que les équations usuelles du mouvement d'une particule chargée et qui correspondent aux équations tridimensionnelles des équations covariantes, contiennent la force de Lorentz dans sa forme intégrale. Au §3.9, nous mettrons en évidence la structure détaillée du potentiel électromagnétique A^α, d'où l'on déduira que des termes supplémentaires dans M^i compensent le coefficient $\frac{1}{2}$, pour ne restituer que l'expression stricte de la force de Lorentz.

§ 3.7 Equations du mouvement obtenues par le principe de moindre action en tant que cas particulier des équations précédentes

Nous nous proposons ici de déduire les équations chr.inv. du mouvement d'une particule massive chargée a partir du principe de moindre action. On sait que le principe variationnel stipule qu'une action S qui déplace une particule le long de la trajectoire la plus courte est minimale, c'est-à-dire que sa variation est nulle

$$\delta \int_a^b dS = 0\,. \tag{3.158}$$

Par suite, les équations dynamiques obtenues à partir de ce principe sont les équations des lignes les plus courtes.

L'action élémentaire des champs gravitationnel et électromagnétique qui déplace une particule chargée au cours d'un intervalle d'espace-temps ds, s'écrit [10]

$$dS = -m_0 c\, ds - \frac{e}{c}\, A_\alpha dx^\alpha. \tag{3.159}$$

On voit que cette expression ne s'applique que pour des particules qui se déplacent le long de trajectoires non isotropes ($ds \neq 0$). Par contre, la méthode du transport parallèle s'applique indifféremment aux deux catégories de trajectoires, c'est-à-dire non isotrope ($ds \neq 0$) et isotrope ($ds = 0$). En outre, ladite méthode s'applique aussi aux géométries non métriques, et en particulier, elle permet d'obtenir les équations dynamiques dans un espace totalement dégénéré (zéro espace). Les équations déduites du principe de moindre action apparaissent ainsi comme un cas très particulier de celui des lignes de direction constante, cas qui résulte du transport parallèle.

Revenons une fois encore au principe de moindre action (3.158). Appliqué a notre particule chargée, celui-ci s'écrit

$$\delta \int_a^b dS = -\,\delta \int_a^b m_0 c\, ds - \delta \int_a^b \frac{e}{c}\, A_\alpha dx^\alpha = 0\,, \tag{3.160}$$

où le premier terme est

$$\begin{aligned} -\,\delta \int_a^b m_0 c\, ds &= -\int_a^b m_0 c\, \mathrm{D}U_\alpha \delta x^\alpha = \\ &= \int_a^b m_0 c\, (dU_\alpha\, ds - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu dx^\nu)\, \delta x^\alpha. \end{aligned} \tag{3.161}$$

Représentons la variation de la seconde intégrale à partir de la formule initiale (3.160) en l'exprimant par la somme

$$-\frac{e}{c}\, \delta \int_a^b A_\alpha dx^\alpha = -\frac{e}{c} \left(\int_a^b \delta A_\alpha dx^\alpha + \int_a^b A_\alpha\, d\delta x^\alpha \right). \tag{3.162}$$

Intégrons maintenant le second terme, il vient

$$\int_a^b A_\alpha\, d\delta x^\alpha = A_\alpha\, \delta x^\alpha \Big|_a^b - \int_a^b dA_\alpha \delta x^\alpha. \tag{3.163}$$

Ici, le premier terme est nul, lorsque l'intégrale est variée aux frontières des coordonnées. Notant que la variation d'un vecteur covariant quelconque s'exprime par

$$\delta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, \delta x^\beta, \qquad dA_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, dx^\beta, \tag{3.164}$$

on obtient la variation de la partie électrique de l'action

$$-\,\frac{e}{c}\, \delta \int_a^b A_\alpha dx^\alpha = -\,\frac{e}{c} \int_a^b \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, dx^\alpha \delta x^\beta - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, \delta x^\alpha dx^\beta \right). \tag{3.165}$$

Transposant les indices libres α et β dans le premier terme de cette formule, et compte tenu de la variation de la partie gravitationnelle de l'action (3.161), on parvient à écrire la variation de l'action globale (3.160)

$$\delta \int_a^b dS = \int_a^b \left[m_0 c\, (dU_\alpha - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu dx^\nu) - \frac{e}{c}\, F_{\alpha\beta}\, dx^\beta \right] \delta x^\alpha, \tag{3.166}$$

où $F_{\alpha\beta} = \frac{A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$ est le tenseur de Maxwell et $U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ est la vitesse quadridimensionnelle de la particule. Les δx^α étant arbitraires,

l'expression sous le signe somme est toujours nulle. Par suite, on parvient aux équations covariantes du mouvement de la particule chargée (indice inférieur)

$$m_0 c \left(\frac{dU_\alpha}{ds} - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu U^\nu \right) = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} U^\beta, \tag{3.167}$$

ou en élevant l'indice α, on obtient les équations contravariantes

$$m_0 c \left(\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \right) = \frac{e}{c} F^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} U^\beta. \tag{3.168}$$

Ces dernières équations constituent en réalité les équations minkowskiennes dans l'espace pseudo-riemannien. Dans l'espace de Minkowski rapporté à un référentiel galiléen (relativité restreinte), les équations déduites se confondent avec les équations relativistes usuelles (3.93).

Par conséquent, les projections chr.inv. des équations obtenues (3.168), peuvent être appelées les équations minkowskiennes chr.inv. de l'espace pseudo-riemannien. Pour une charge associée à notre Univers (se déplaçant vers le futur), les équations minkowskiennes chr.inv. s'écriront

$$\frac{dE}{d\tau} - mF_i \mathrm{v}^i + mD_{ik} \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k = -eE_i \mathrm{v}^i, \tag{3.169}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right), \end{aligned} \tag{3.170}$$

et pour la particule correspondante de l'Univers miroir (se déplaçant dans le passé)

$$-\frac{dE}{d\tau} - mF_i \mathrm{v}^i + mD_{ik} \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k = -eE_i \mathrm{v}^i, \tag{3.171}$$

$$\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \tag{3.172}$$

Les équations scalaires du mouvement chr.inv. exprimées dans notre Univers ou dans l'Univers miroir, représentent le théorème des forces vives. Les membres de droite des équations vectorielles chr.inv. représentent la force de Lorentz chr.inv. dans l'espace pseudo-riemannien. Par rapport à un référentiel galiléen de l'espace de Minkowski, il est facile de voir que les équations obtenues s'identifient au théorème usuel des forces vives (3.92), ainsi qu'aux équations tridimensionnelles du mouvement (3.90) de l'électrodynamique classique.

Manifestement, les termes de droite des équations dynamiques (3.169–3.172), obtenues à partir du principe de moindre action, sont différents des termes de droite des équations (3.146, 3157) déduites de la méthode du transport parallèle.

La différence se traduit ici par l'absence dans (3.169–3.172) de nombreux termes qui caractérisent la structure du champ électromagnétique actif et la structure même de l'espace. Cependant, comme indiqué plus haut, les lignes les plus courtes ne sont qu'un cas particulier des lignes de direction constante définies par transport parallèle. Par suite, il n'est pas surprenant de trouver dans les équations déduites du transport parallèle, des termes supplémentaires relatifs à la structure du champ et de l'espace.

§ 3.8 La structure géométrique du 4-potentiel électromagnétique

Dans ce paragraphe, nous allons définir la structure d'un potentiel électromagnétique A^α, sous l'influence duquel le vecteur global de la particule chargée, $Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2} A^\alpha$ demeure inchangé lors de son transport parallèle au sens de Levi-Civita (on envisage donc un espace pseudo-riemannien).

Ainsi que nous le savons, le transport parallèle de Levi-Civita conserve la longueur de tout vecteur Q^α transporté et valide la condition $Q_\alpha Q^\alpha = conste$. Dans l'espace pseudo-riemannien de dimension n, le carré de la longueur d'un vecteur à n dimensions est invariant, propriété évidemment vérifiée dans tout autre système de référence, et en particulier dans le référentiel d'accompagnement du corps physique. Par conséquent, nous pouvons analyser la condition $Q_\alpha Q^\alpha = conste$, en la formulant au moyen de quantités observables dans ce référentiel d'accompagnement, c'est-à-dire sous forme chr.inv.

Les composantes du vecteur Q^α dans le référentiel d'accompagnement sont

$$Q_0 = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right), \tag{3.173}$$

$$Q^0 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left[\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\, v_i \left(m\mathrm{v}^i + \frac{e}{c}\, q^i\right)\right], \tag{3.174}$$

$$Q_i = -\frac{1}{c}\left(m\mathrm{v}_i + \frac{e}{c}\, q_i\right) - \frac{1}{c}\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right) v_i\,, \tag{3.175}$$

$$Q^i = \frac{1}{c}\left(m\mathrm{v}^i + \frac{e}{c}\, q^i\right), \tag{3.176}$$

et son carré

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2}{c^4}\left(\varphi^2 - q_i q^i\right) + \frac{2me}{c^2}\left(\pm\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\, q^i\right). \tag{3.177}$$

Partant, on voit clairement que le carré du vecteur global de la particule chargée peut se diviser en plusieurs quantités :

a) Le carré de la 4-impulsion de la particule $P_\alpha P^\alpha = m_0^2$;

b) Le carré de la 4-impulsion supplémentaire $\frac{e}{c^2} A^\alpha$ qui est communiquée par l'action du champ électromagnétique (le second terme) ;

c) Le terme $\frac{2me}{c^2}(\pm\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\, q^i)$, qui décrit l'interaction entre la masse m de la particule et sa charge électrique e.

Dans la formule se rapportant à $Q_\alpha Q^\alpha$ (3.177), le premier terme m_0^2 reste inchangé. Nous proposons donc d'attribuer au potentiel vecteur, la structure suivante

$$q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i. \tag{3.178}$$

Dans ce cas*, le second terme de (3.177) s'écrit

$$\frac{e^2}{c^4} A_\alpha A^\alpha = \frac{e^2\varphi^2}{c^4}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right). \tag{3.179}$$

Transformant le troisième terme de la même façon, on obtient le carré du vecteur Q^α (3.177) sous la forme

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2\varphi^2}{c^4}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \frac{2m_0\, e}{c^2}\,\varphi\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,. \tag{3.180}$$

Puis, introduisant la notation suivante pour le potentiel scalaire du champ

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{3.181}$$

on peut représenter la formule obtenue (3.180) comme suit

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2\varphi_0^2}{c^4} + \frac{2m_0\, e\varphi_0}{c^2} = \mathit{conste}. \tag{3.182}$$

La longueur du vecteur global Q^α demeure donc inchangée lors de son transport parallèle, si les potentiels observables du champ φ et q^i,

*On peut résoudre le même problème en supposant que $q^i = \pm\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i$. Cependant, il est facile de voir que seules les valeurs positives de $q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i$ ont un sens, car par définition, le temps physique observable τ de l'observateur s'écoule du passé vers le futur, et donc l'intervalle de temps physiquement observable τ est toujours positif.

sont reliés au 4-potentiel A^α, selon

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad A^i = q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i. \tag{3.183}$$

Dans ce cas, pour le vecteur $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$, qui caractérise l'interaction particule chargée/champ électromagnétique, on aura

$$\frac{e}{c^2}\,\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{e\varphi_0}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \frac{e}{c^2}\,A^i = \frac{e\varphi_0}{c^3}\,\frac{\mathrm{v}^i}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.184}$$

Les dimensions des vecteurs $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$ et $P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}$ dans les systèmes d'unités de Gauss et CGSE sont les mêmes pour la masse m [g].

L'examen des projections chr.inv. des deux vecteurs, permet de comparer avec une expression similaire pour la masse relativiste m, interagissant avec la charge de la particule et dont l'expression est

$$\frac{e\varphi}{c^2} = \frac{e\varphi_0}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{3.185}$$

où $e\varphi$ est l'énergie potentielle de la particule se déplaçant dans un champ électromagnétique à la vitesse observable $\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ (particule au repos par rapport à l'observateur et son corps physique de référence). Classiquement, le potentiel scalaire φ est l'énergie potentielle de la particule, divisée par l'unité de charge. Donc, $e\varphi$ est *l'énergie potentielle relativiste* de la particule de charge e dans le champ électromagnétique.

Considérant $E = mc^2$ and $W = e\varphi$, on parvient à la même conclusion. Corrélativement, $\frac{W_0}{c^2} = \frac{e\varphi_0}{c^2}$ est une grandeur électromagnétique analogue à la masse au repos m_0. Par suite, la quantité chr.inv. $\frac{e}{c^2}\,A^i = \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}^i$ vi est similaire au vecteur d'impulsion observable chr.inv. $p^i = m\mathrm{v}^i$. De la sorte, lorsque la particule est au repos par rapport au champ, sa projection sur la section spatiale de l'observateur (le vecteur chr.inv.) est nulle, et seule la projection temporelle (énergie potentielle au repos $e\varphi_0$) est observable. Par contre, si la particule se déplace dans le champ à la vitesse vi, ses projections observables seront constituées par l'énergie potentielle relativiste $e\varphi$, et la 3-impulsion $\frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}^i$.

Après obtention des projections chr.inv. du vecteur $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$, calculées pour la structure (3.183), le vecteur A^α peut être rétabli sous sa forme généralement covariante. Tenant compte de ses composantes spatiales

$$A^i = q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i = \frac{\varphi}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,\frac{dx^i}{d\tau} = \varphi_0\,\frac{dx^i}{ds}\,, \tag{3.186}$$

on obtient la notation covariante désirée pour A^α

$$A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \qquad \frac{e}{c^2}\,A^\alpha = \frac{e\varphi_0}{c^2}\frac{dx^\alpha}{ds}\,. \tag{3.187}$$

Parallèlement, si on prend les projections chr.inv. de A^α (3.187)

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\varphi = \pm\frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad A^i = q^i = \frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^i, \tag{3.188}$$

on voit apparaître des signes alternés dans les projections chr.inv., à l'inverse de la formule initiale (3.189). Quelle est alors la signification de cette différence de signe entre la composante φ du 4-vecteur A^α (3.187), et celle de la composante scalaire observable ? On peut répondre à cette question en observant que dans le premier cas, φ et q^i sont calculés à partir de la règle générale de construction des quantités chr.inv., mais ici, ces potentiels sont pas suffisamment définis, car la structure du vecteur projeté A^α n'est pas connue. Les formules décrivant les projections temporelles et spatiales (3.183) ne contiennent en effet que les symboles φ et q^i, qui ne nous informent pas sur leur structure. Au contraire, dans les formules (3.188), ces mêmes quantités φ et q^i sont déterminées en appliquant les formules $\varphi = \sqrt{g_{00}}\,A^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,A^i$ et $q^i = A^i$, à l'aide des composantes A^0 et A^i déjà écrites. Dans le second cas, la quantité $\pm\varphi$ se déduit du calcul et détermine la formule spécifique

$$\varphi = \pm\frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.189}$$

Par conséquent, les projections chr.inv. calculées pour le vecteur $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$ auront la forme

$$\frac{e}{c^2}\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\frac{e\varphi}{c^2} = \pm\frac{e\varphi_0}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \frac{e}{c^2}\,A^i = \frac{e\varphi}{c^3}\,\mathrm{v}^i, \tag{3.190}$$

où le "plus" indique que la particule est située dans notre Univers et se déplace du passé vers le futur, tandis que le "moins" traduit la situation de la particule dans l'Univers miroir, s'éloignant dans le passé par rapport à nous. Le carré de la longueur du vecteur est

$$\frac{e^2}{c^4}\,A_\alpha A^\alpha = \frac{e^2\varphi^2}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) = \frac{e^2\varphi_0^2}{c^4} = \mathit{conste}\,. \tag{3.191}$$

La longueur du vecteur $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$ est réelle pour $\mathrm{v}^2 < c^2$, nulle si $\mathrm{v}^2 = c^2$ et imaginaire pour $\mathrm{v}^2 > c^2$. Nous limiterons néanmoins notre étude au

cas du vecteur réel (vitesses subluminiques), les particules chargées du genre temps ou supraluminiques étant impossibles à définir.

Examinant les formules $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$, et $\frac{e}{c^2} A^\alpha = \frac{e\varphi_0}{c^2} \frac{dx^\alpha}{ds}$, on voit que les deux vecteurs sont colinéaires et donc tangents à la même trajectoire isotrope paramétrisée par s. Dans ce cas, le 4-vecteur impulsion P^α de la particule est colinéaire au champ électromagnétique, de sorte que cette particule se déplace le long de ce champ.

Envisageons maintenant le cas général où les vecteurs ne sont pas colinéaires. A partir du carré du vecteur global $Q_\alpha Q^\alpha$ (3.177), on voit que le 3ème terme est le produit scalaire double des vecteurs P^α et $\frac{e}{c^2} A^\alpha$. Le transport parallèle des vecteurs préserve leur produit scalaire

$$\mathrm{D}\left(P_\alpha A^\alpha\right) = A^\alpha \mathrm{D}P_\alpha + P_\alpha \mathrm{D}A^\alpha = 0\,, \tag{3.192}$$

car l'accroissement absolu de chaque vecteur est nul. Nous aurons donc

$$\frac{2e}{c^2} P_\alpha A^\alpha = \frac{2me}{c^2}\left(\pm\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\, q^i\right) = \mathit{conste}, \tag{3.193}$$

c'est-à-dire que le produit scalaire de P^α et $\frac{e}{c^2} A^\alpha$ demeure inchangé. Par suite, les longueurs des deux vecteurs demeurent également inchangées. En particulier, nous avons

$$A_\alpha A^\alpha = \varphi^2 - q_i q^i = \mathit{conste}. \tag{3.194}$$

Il est bien connu que le produit scalaire de deux vecteurs est le produit de leur longueur multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment. Par conséquent, le transport parallèle préserve également l'angle des vecteurs transportés

$$\cos\left(P^\alpha; A^\alpha\right) = \frac{P_\alpha A^\alpha}{m_0\sqrt{\varphi^2 - q_i q^i}} = \mathit{conste}. \tag{3.195}$$

Compte tenu de la formule pour la masse relativiste m, on peut réécrire la condition (3.193), comme

$$\frac{2e}{c^2} P_\alpha A^\alpha = \pm\frac{2m_0 e}{c^2}\frac{\varphi}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} - \frac{2m_0 e}{c^2}\frac{\mathrm{v}_i\, q^i}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \mathit{conste}, \tag{3.196}$$

ou comme la relation entre les potentiels scalaire et vectoriel

$$\pm\frac{\varphi}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} - \frac{\mathrm{v}_i\, q^i}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \mathit{conste}. \tag{3.197}$$

Par exemple, on peut trouver la relation entre les potentiels φ et q^i, pour le cas où le vecteur impulsion P^α de la particule est orthogonal à

l'impulsion supplémentaire $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$, loin du champ électromagnétique.

Le transport parallèle préservant l'angle des vecteurs transportés (3.195), le cosinus correspondant est nul, et donc

$$P_\alpha A^\alpha = \pm\,\varphi - \frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\,q^i = 0\,. \tag{3.198}$$

Par conséquent, si la particule se déplace dans le champ électromagnétique de telle façon que les vecteurs P^α et A^α sont orthogonaux, le potentiel scalaire du champ se réduit à

$$\varphi = \pm\,\frac{1}{c}\,\mathrm{v}_i\,q^i, \tag{3.199}$$

c'est-à-dire que c'est le produit scalaire de la vitesse observable v^i de la particule, et du potentiel vectoriel spatial observable q^i.

Nous allons maintenant trouver la formule du carré du vecteur global Q^α, en supposant que la structure du potentiel électromagnétique est décrite par $A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ (3.187), d'où il découle que le vecteur du champ A^α est colinéaire au vecteur impulsion P^α de la particule. Alors

$$Q_\alpha Q^\alpha = m^2 - \frac{m^2}{c^2}\,\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i + \frac{e^2}{c^4}\left(\varphi^2 - q_i\,q^i\right) = m_0^2 + \frac{e^2}{c^4}\,\varphi_0^2\,. \tag{3.200}$$

Multipliant ensuite chaque membre de l'équation par c^4, et notant l'énergie relativiste de la particule $E = mc^2$, on obtient

$$E^2 - c^2p^2 + e^2\varphi^2 - e^2 q_i\,q^i = E_0^2 + e^2\varphi_0^2\,. \tag{3.201}$$

§ 3.9 Les équations minkowskiennes comme cas particulier des équations du mouvement déduites

Au paragraphe §3.6, nous avons considéré une particule massive chargée dont le mouvement dans un espace pseudo-riemannien a été déduit par la *méthode du transport parallèle*. Nous avons ainsi obtenu les projections chr.inv. des équations covariantes du mouvement.

Dans un repère galiléen, leur projection temporelle chr.inv. (3.147) coïncide avec leur composante temporelle déduite des équations minkowskiennes (3.98), et ces équations représentent alors le théorème des forces vives de l'électrodynamique classique (3.92) dans le 3-espace euclidien. Cependant, les membres de droite des projections spatiales chr.inv. contiennent le terme chr.inv. $-e\big(E^i + \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$, au lieu de la force de Lorentz chr.inv. $\Phi^i = -e\big(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$, ainsi que de très nombreux termes supplémentaires qui dépendent des caractéristiques observables du champ électromagnétique actif, et de l'espace même. Par conséquent, le principe de correspondance entre les projections spatiales

chr.inv. et les équations tridimensionnelles, s'établit ici de manière non triviale.

D'un autre côté, les équations des lignes de direction constante obtenues au moyen du transport parallèle dans un espace pseudo-riemannien est un cas plus général des lignes extrémales déduites de la méthode du principe de moindre action. Les équations du mouvement obtenues à partir de ce principe (§3.7) possèdent une structure qui coïncide avec celle des équations minkowskiennes. Nous pouvons donc supposer que les projections chr.inv. des équations du mouvement (§3.6) ont bien un caractère plus général. Dans un cas particulier, elles peuvent être identifiées aux projections chr.inv. des équations du mouvement, obtenues à partir du principe de moindre action (§3.7).

Pour trouver les conditions qui conduisent à cette possibilité, nous allons considérer les projections chr.inv. des équations du mouvement (3.157) qui contiennent les termes interdisant la concordance avec la force de Lorentz. Pour la commodité de l'analyse, nous noterons M^i l'ensemble des termes de droite (3.157). Substituant le champ magnétique H^{ik} (3.12) dans le terme $\frac{e\varphi}{c^2}\,A^{ik}\mathrm{v}_k$ de M^i, celui-ci s'écrit

$$\frac{e\varphi}{c^2}\,A^{ik}\mathrm{v}_k = \frac{e}{2c}\,h^{im}\mathrm{v}^n\left(\frac{{}^*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{{}^*\partial q_n}{\partial x^m}\right) - \frac{e}{2c}\,\varepsilon^{ikm}H_{*m}\mathrm{v}_k\,, \qquad (3.202)$$

où $\varepsilon^{ikm}H_{*m} = H^{ik}$.

A présent, on substitue les composantes chr.inv. du potentiel électromagnétique A^α, comme cela a été fait pour (3.188) dans (3.157). Avec ce potentiel, le vecteur $\frac{e}{c^2}\,A^\alpha$ de l'impulsion supplémentaire communiquée à la particule chargée par le champ électromagnétique, est tangent à la trajectoire de la particule.

Appliquant maintenant la première formule $q_m = \frac{\varphi}{c}\mathrm{v}_m$, on trouve que l'expression de droite ne dépend que du potentiel scalaire du champ

$$\begin{aligned} M^i = &-e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right) + \\ &+ eh^{ik}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{e\varphi}{2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right). \end{aligned} \qquad (3.203)$$

Substituant enfin la formule relativiste du potentiel scalaire φ (3.181) dans cette dernière équation, on voit que la somme des deux derniers termes est nulle

$$-\frac{e\varphi}{2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \frac{e\varphi}{2}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) = 0\,, \qquad (3.204)$$

M^i se présente donc sous la forme de la force de Lorentz chr.inv.

$$M^i = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right), \tag{3.205}$$

ce que nous voulions démontrer.

Nous nous proposons maintenant d'étudier l'expression c^2T de l'équation scalaire du mouvement chr.inv. (3.147), sous la condition que le vecteur A^α possède la structure décrite précédemment, et soit en même temps tangent à la trajectoire de la particule. Insérons les projections chr.inv. φ et q^i du vecteur A^α ainsi défini dans (3.146), la quantité T prend alors la forme

$$\begin{aligned} c^2T &= -\,eE_i\mathrm{v}^i - e\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \frac{e}{c^2}\left[\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\varphi h_{ik}\,\mathrm{v}^k\right) - \varphi D_{ik}q^k\right]\mathrm{v}^i = \\ &= -\,eE_i\mathrm{v}^i - e\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t}\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \frac{e\varphi}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.206}$$

Substituant ensuite la définition relativiste de φ (3.181) dans la première dérivée puis rétablissant cette valeur après dérivation, on obtient finalement

$$\begin{aligned} c^2T &= -\,eE_i\mathrm{v}^i - \frac{e\varphi}{2c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\right) + \frac{e\varphi}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \\ &+ \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t} = -\,eE_i\mathrm{v}^i - \frac{e\varphi}{2c^2}\left(\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + 2\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t}\right) + \\ &+ \frac{e\varphi}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \frac{e\varphi}{c^2}\,\mathrm{v}_k\frac{{}^*\partial\mathrm{v}^k}{\partial t} = -\,eE_i\mathrm{v}^i, \end{aligned} \tag{3.207}$$

compte tenu de la définition du tenseur des déformations d'espace D_{ik} (1.40), où $\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t} = 2D_{ik}$.

Par conséquent, l'utilisation de la méthode du transport parallèle conduit à la conclusion suivante : dans un espace pseudo-riemannien, les équations du mouvement d'une particule chargée coïncident avec celles déduites du principe de moindre action dans le cas particulier où :

a) Le potentiel du champ électromagnétique A^α possède la structure $A^\alpha = \varphi_0\frac{dx^\alpha}{ds}$ (3.187) ;
b) Le potentiel du champ électromagnétique A^α est tangent à la trajectoire quadridimensionnelle de la particule.

Il en résulte que dans l'espace de Minkowski rapporté à un repère galiléen, pour un tel potentiel électromagnétique, les équations dynamiques chr.inv. ainsi déduites, coïncident formellement avec l'expression

du théorème des forces vives (équations scalaires du mouvement chr. inv.) et avec les équations minkowskiennes de l'électrodynamique classique (équations vectorielles chr.inv.) décrites dans le 3-espace euclidien.

Il convient de noter que du point de vue dynamique, cette circonstance illustre à nouveau le fait que les lignes extrémales déduites du principe de moindre action, ne sont qu'un cas particulier des lignes de direction constante qui résultent de la méthode du transport parallèle.

§ 3.10 Structure de l'espace empli d'un champ électromagnétique stationnaire

Il est évident qu'en attribuant une structure particulière aux champs électromagnétiques, on impose certaines limites aux mouvements des charges, qui a leur tour exercent certaines contraintes sur la structure de l'espace pseudo-riemannien dans lequel elles se déplacent. Nous nous proposons de définir la structure de cet espace qui puisse permettre à la particule chargée de se mouvoir dans un champ électromagnétique stationnaire.

Dans notre Univers, les équations du mouvement chr.inv. d'une particule massive chargée, ont la forme

$$\frac{dE}{d\tau} - mF_i \mathrm{v}^i + mD_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -e\,\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c}\left(F_i\,q^i - D_{ik}\,q^i\mathrm{v}^k\right), \tag{3.208}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d\left(m\mathrm{v}^i\right)}{d\tau} - mF^i + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &= -\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c}\left(\frac{\varphi}{c}\,\mathrm{v}^k + q^k\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) + \frac{e\varphi}{c^2}\,F^i - \frac{e}{c}\,\Delta^i_{nk}\,q^n\mathrm{v}^k. \end{aligned} \tag{3.209}$$

Etant donné que le champ électromagnétique est stationnaire, les potentiels du champ φ et q^i ne dépendent que des coordonnées spatiales. Dans ce cas, les composantes chr.inv. du tenseur du champ électromagnétique s'écrivent

$$E_i = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \varphi\,\frac{\partial}{\partial x^i}\ln\!\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \tag{3.210}$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}H_{mn} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c}\,A_{mn}\right). \tag{3.211}$$

A ce stade, nous parvenons aux limites de la métrique spatiale imposées par le caractère stationnaire du champ électromagnétique actif.

Les formules pour E_i et H^{*i}, ainsi que les dérivées chr.inv. des potentiels scalaire et vectoriel incluent déjà les propriétés de l'espace, à

savoir le vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle F_i, et le tenseur chr.inv. de non holonomicité d'espace A_{ik}. Dans les champs électromagnétiques stationnaires, les propriétés de l'espace ainsi défini sont manifestement aussi stationnaires

$$\frac{{}^*\partial F_i}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{{}^*\partial F^i}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{{}^*\partial A^{ik}}{\partial t} = 0\,. \tag{3.212}$$

A partir de ces définitions, on voit que les quantités F_i et A_{ik} sont stationnaires (indépendantes du temps), si la vitesse linéaire de rotation d'espace est également stationnaire $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$. Donc, cette dernière condition $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$, à savoir rotation d'espace stationnaire, réduit la dérivée spatiale chr.inv. à la dérivée spatiale ordinaire

$$\frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{3.213}$$

Etant donné que la dérivée chr.inv. par rapport au temps ne diffère de la dérivée ordinaire que par le multiplicateur $\frac{\partial}{\partial t} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{{}^*\partial}{\partial t}$, la dérivée temporelle usuelle d'une grandeur stationnaire est également nulle.

Pour le tenseur des déformations d'espace D_{ik}, exprimé dans une rotation spatiale stationnaire, il vient

$$\frac{{}^*\partial D_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(-\,g_{ik} + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k\right) = -\frac{1}{2}\frac{{}^*\partial g_{ik}}{\partial t}\,. \tag{3.214}$$

Dans le cas envisagé, le membre de droite des équations du mouvement étant stationnaire, le membre de gauche doit être aussi stationnaire. Il s'ensuit que l'espace ne se déforme pas. Selon (3.214), le 3-tenseur métrique g_{ik} ne dépend pas du temps, et donc les symboles de Christoffel chr.inv. Δ^i_{jk} (1.47) sont également stationnaires.

Au moyen des composantes chr.inv. du tenseur de Maxwell (3.63, 3.64) pour le champ électromagnétique stationnaire, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,E^i - \frac{2}{c}\,\Omega_{*m}H^{*m} = 4\pi\rho \\ &\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h} \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.215}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,H^{*i} + \frac{2}{c}\,\Omega_{*m}E^m = 0 \\ &\varepsilon^{ikm}\,{}^*\widetilde{\nabla}_k\big(E_m\sqrt{h}\big) = 0 \end{aligned}\right\}\quad \mathrm{II}\,. \tag{3.216}$$

Par suite, la condition de Lorentz (3.65) et l'équation de continuité (3.66) prennent respectivement la forme

$$ {}^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = 0\,, \qquad {}^*\widetilde{\nabla}_i\, j^i = 0\,. \tag{3.217} $$

Nous avons donc trouvé la façon suivant laquelle l'état stationnaire d'un champ électromagnétique perturbe les propriétés observables de l'espace pseudo-riemannien et donc les équations principales de l'électrodynamique.

Au cours des prochains chapitres §3.11–§3.13, nous utiliserons ces résultats pour résoudre les équations du mouvement d'une particule chargée (3.208–3.209) dans le cas de 3 types de champs électromagnétiques stationnaires :

1) Un champ électrique stationnaire (vecteur magnétique nul) ;
2) Un champ magnétique stationnaire (vecteur électrique nul) ;
3) Un champ électromagnétique stationnaire (les deux vecteurs sont non nuls).

§ 3.11 Mouvement dans un champ électrique stationnaire

Envisageons le mouvement d'une charge massive dans un espace pseudo-riemannien balayé par un champ électromagnétique réduit à sa contribution électrique, la composante magnétique ne se révélant pas à l'observateur.

Cherchons à connaître les conditions auxquelles doit satisfaire l'espace pour permettre l'émergence d'un champ électromagnétique stationnaire strictement électrique. A partir de la formule décrivant l'état stationnaire du champ magnétique

$$ H_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{\partial q_k}{\partial x^i} - \frac{2\varphi}{c}\, A_{ik} \tag{3.218} $$

nous voyons que pour $H_{ik} = 0$, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

a) Le potentiel vecteur q^i est irrotationnel ($\frac{\partial q_i}{\partial x^k} = \frac{\partial q_k}{\partial x^i}$) ;
b) L'espace est holonome ($A_{ik} = 0$).

Le vecteur électrique E_i (3.210) est la somme de la dérivée spatiale du potentiel scalaire φ et du terme $\frac{\varphi}{c^2} F_i$, mais à la surface de la terre, le rapport du potentiel de gravitation à la vitesse de la lumière n'est rien d'autre que

$$ \frac{\mathrm{w}}{c^2} = \frac{GM_\oplus}{c^2 R_\oplus} \approx 10^{-10}. \tag{3.219} $$

Par suite, dans un laboratoire physique terrestre, le second tenseur dans (3.210) est négligeable de sorte que les E_i ne vont dépendre que de la distribution spatiale du potentiel scalaire

$$E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \,. \tag{3.220}$$

Les membres de droite des équations du mouvement représentant la force de Lorentz sont stationnaires et implique donc la même propriété pour les membres de gauche. Dans les conditions envisagées ici, cette circonstance se vérifie si le tenseur des déformations est nul (l'espace ne se déforme pas). Par conséquent, si un champ électromagnétique stationnaire est caractérisé par une composante électrique non nulle, et en l'absence de composante magnétique, l'espace pseudo-riemannien qui contient le champ doit satisfaire aux conditions suivantes :

a) Le potentiel w du champ gravitationnel actif est négligeable $\mathrm{w} \approx 0$;

b) L'espace n'est pas en rotation $A_{ik} = 0$;

c) L'espace ne se déforme pas $D_{ik} = 0$.

Pour faciliter les calculs, nous supposerons que notre 3-espace s'identifie à l'espace euclidien, c'est-à-dire $\Delta^i_{nk} \approx 0$. Les équations chr.inv. du mouvement d'une particule de charge e (3.208, 3.209) prennent alors la forme

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau} \,, \tag{3.221}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) = -\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau} \,. \tag{3.222}$$

A partir des équations scalaires chr.inv. du mouvement (théorème des forces vives), nous voyons que les variations de l'énergie relativiste de la particule $E = mc^2$, résulte du travail effectué par le champ électrique E_i.

A partir des équations vectorielles du mouvement chr.inv., on voit que l'impulsion observable de particule a changé sous l'influence de la variation du potentiel vecteur q^i. En supposant que le 4-potentiel est tangent à la trajectoire quadridimensionnelle de la particule (comme au §3.9), on obtient la 3-force de Lorentz

$$\Phi^i = -\,eE^i \tag{3.223}$$

au membre de droite. Autrement dit, l'impulsion observable de la particules a varié sous l'action du vecteur champ électrique.

Les deux groupes d'équations de Maxwell chr.inv. se rapportant à un champ stationnaire (3.215, 3.216) prennent dans ce cas la forme par-

ticulièrement simple

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial E^i}{\partial x^i} = 4\pi\rho \\ j^i = 0\end{array}\right\}\ \mathrm{I}\,, \qquad \left.\varepsilon^{ikm}\,\dfrac{\partial E_m}{\partial x^k} = 0\right\}\ \mathrm{II}\,. \tag{3.224}$$

Intégrant les équations scalaires dynamiques chr.inv. (théorème des forces vives), on parvient à la fameuse *intégrale des forces vives*

$$m + \frac{e\varphi}{c^2} = B = conste, \tag{3.225}$$

où B est la constante d'intégration.

Comme conséquence supplémentaire des équations de Maxwell chr. inv., on note que le potentiel scalaire du champ satisfait soit 1) ou 2) :

1) Equation de Poisson $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi\rho,\ \ \rho \neq 0\,;$

2) Equation de Laplace $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,\ \rho = 0.$

De la sorte, nous aurons défini les propriétés de l'espace pseudo-riemannien qui déterminent le mouvement des particules chargées dans un champ électrique stationnaire. Il semblerait alors naturel de déduire maintenant les solutions exactes des équations chr.inv. du mouvement pour une telle particule, à savoir les équations (3.221, 3.222). Cependant, on peut voir que cela n'est possible qu'à la condition d'attribuer au champ une structure particulière fixée par les équations de Maxwell. A cet effet, et dans un souci simplificateur, on supposera donc le champ parfaitement homogène.

Le vecteur champ électrique covariant chr.inv. est ici dirigé suivant l'axe x. En accord avec Landau et Lifshitz (cf. §20 *Théorie des Champs* [10]), nous envisagerons le cas d'une charge électrique *repoussée* par le champ (valeur numérique négative du champ électrique par rapport aux valeurs croissantes de la coordonnée x de la particule*). Alors les composantes du vecteur E_i sont

$$E_1 = E_x = -E = conste, \qquad E_2 = E_3 = 0\,. \tag{3.226}$$

Puisque le champ homogène entraîne $E_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = conste$, et le potentiel scalaire φ, fonction de x, satisfaisant l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{3.227}$$

*Bien évidemment, si la particule est attirée par le champ, le vecteur champ électrique est positif avec les coordonnées de la particule dans le sens décroissant.

on en déduit que le champ électrique stationnaire satisfait la condition d'absence de charges $\rho = 0$.

Supposons que la particule se déplace le long du vecteur champ électrique E_i, c'est-à-dire suivant x. Les équations chr.inv. de son mouvement seront donc

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{dx^i}\,\mathrm{v}^i = \frac{e}{c^2}\,E\,\frac{dx}{d\tau}\,, \tag{3.228}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx}{d\tau}\right) = eE\,, \quad \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dy}{d\tau}\right) = 0\,, \quad \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dz}{d\tau}\right) = 0\,. \tag{3.229}$$

Intégrant les équations scalaires du mouvement chr.inv. (théorème des forces vives), on parvient à l'intégrale des forces vives

$$m = \frac{eE}{c^2}\,x + B\,, \qquad B = \mathit{conste}. \tag{3.230}$$

Cette dernière constante s'obtient à partir des conditions initiales d'intégration $m|_{\tau=0} = m_{(0)}$ et $x|_{\tau=0} = x_{(0)}$

$$B = m_{(0)} - \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,, \tag{3.231}$$

d'où la solution (3.230) qui prend la forme

$$m = \frac{eE}{c^2}\left(x - x_{(0)}\right) + m_{(0)}\,. \tag{3.232}$$

Substituant l'intégrale des forces vives ainsi déduite dans les équations vectorielles dynamiques chr.inv. (3.229), on trouve*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = 0 \\ &\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.233}$$

Nous remarquons que l'on peut séparer les variables dans les deux dernières équations de (3.233)

$$\frac{\ddot{y}}{y} = \frac{-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \qquad \frac{\ddot{z}}{z} = \frac{-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \tag{3.234}$$

*Le point signifie la dérivation par rapport au temps observable.

et en les intégrant, on obtient

$$\dot{y} = \frac{C_1}{B + \frac{eE}{c^2}\, x}\,, \qquad \dot{z} = \frac{C_2}{B + \frac{eE}{c^2}\, x}\,, \tag{3.235}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration qui peuvent être déterminées en fixant les conditions initiales $\dot{y}|_{\tau=0} = \dot{y}_{(0)}$, et $\dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}_{(0)}$, et en utilisant la formule pour B (3.121). Il en résulte

$$C_1 = m_{(0)}\, \dot{y}_{(0)}\,, \qquad C_2 = m_{(0)}\, \dot{z}_{(0)}\,. \tag{3.236}$$

Il nous faut maintenant résoudre l'équation du mouvement suivant x — la première équation de (3.233). Posons $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = p$. Donc

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = pp', \tag{3.237}$$

et l'équation précédente du mouvement suivant x devient une équation à variables séparées

$$\frac{p\, dp}{1 - \frac{p^2}{c^2}} = \frac{eE\, dx}{B + \frac{eE}{c^2}\, x}\,, \tag{3.238}$$

qui est une intégrale standard. Après intégration, on trouve la solution

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{c^2}} = \frac{C_3}{B + \frac{eE}{c^2}\, x}\,, \qquad C_3 = conste. \tag{3.239}$$

Posant $p = \dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}_{(0)}$ et substituant B de (3.231), on trouve la constante d'intégration

$$C_3 = m_{(0)} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}\,. \tag{3.240}$$

Dans le cas envisagé, on peut remplacer l'intervalle de temps physiquement observable $d\tau$, par l'intervalle de la coordonnée temporelle dt, ce qui sera explicité au prochain paragraphe.

Dans leur ouvrage la *Théorie des Champs*, Landau et Lifshitz ont résolu les équations du mouvement d'une particule chargée dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte rapporté a un référentiel galiléen [10]. Afin de comparer leurs solutions avec les nôtres, nous devons alors envisager le même cas particulier (mouvement dans un champ homogène et stationnaire (cf. §20 de la *Théorie des Champs*). Mais dans ce cas, comme montré précédemment dans ce paragraphe par les méthodes des invariants chronométriques, on a $F_i = 0$ et $A_{ik} = 0$, et par suite

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2}\, v_i\, dx^i = dt\,. \tag{3.241}$$

Autrement dit, dans le domaine quadridimensionnel où la particule se déplace ici, la métrique est galiléenne.

Substituant la variable $p = \frac{dx}{dt}$ dans la formule (3.239), on arrive à

$$\frac{dx}{dt} = c\,\frac{\sqrt{\left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)^2 - C_3^2}}{B + \frac{eE}{c^2}\,x}\,, \tag{3.242}$$

dont la solution est la fonction

$$ct = \frac{c^2}{eE}\sqrt{\left(B + \frac{eE}{c^2}x\right)^2 - C_3^2} + C_4\,, \quad C_4 = const, \tag{3.243}$$

et où compte tenu des conditions initiales à l'instant $t = 0$, la constante d'intégration C_4 est

$$C_4 = -\frac{m_{(0)}c}{eE}\,\dot{x}_{(0)}\,. \tag{3.244}$$

A présent, formulant la coordonnée x explicitement à partir de (3.243) au moyen de t, on obtient la solution finale des équations chr.inv. du mouvement de la particule chargée suivant x

$$x = \frac{c^2}{eE}\left[\sqrt{\frac{e^2E^2}{c^4}\,(ct - C_4)^2 + C_3^2} - B\right], \tag{3.245}$$

ou après avoir substitué les constantes d'intégration

$$x = \sqrt{\left(ct + \frac{m_{(0)}c\dot{x}_{(0)}}{eE}\right)^2 + \left(\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\right)^2\left(1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}\right)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} + x_{(0)}\,. \tag{3.246}$$

Si le champ *attire* la particule (le vecteur champ électrique est positif $E_1 = E_x = E = conste$), on obtient la même solution pour x mais avec un signe inversé

$$x = \frac{c^2}{eE}\left[B - \sqrt{\frac{e^2E^2}{c^4}\,(ct - C_4)^2 + C_3^2}\right]. \tag{3.247}$$

Dans la *Théorie des Champs* [10], un problème similaire est envisagé, mais Landau et Lifshitz l'ont résolu par intégration des 3-composantes des équations covariantes du mouvement (les équations minkowskiennes tridimensionnelles), sans tenir compte du théorème des forces vives. Leur formule pour x s'écrit

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{(m_0c^2)^2 + (ceEt)^2}\,. \tag{3.248}$$

Cette formule coïncide avec notre solution (3.245), si $x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} = 0$, et lorsque la vitesse initiale de la particule est nulle $\dot{x}_{(0)} = 0$. Ces dernières restrictions qui apparaissent dans la *Théorie des Champs*, constituent des simplifications notables, qui impliquent la nullité des constantes d'intégration.

Comme on peut facilement le voir, résoudre les équations dynamiques dans un référentiel galiléen de l'espace de Minkowski en appliquant la méthode des invariants chronométriques, met en évidence certains facteurs cachés qui sont totalement omis dans la résolution classique des équations tridimensionnelles.

Nous nous proposons maintenant de calculer la trajectoire tridimensionnelle de la particule dans le champ électrique homogène et stationnaire envisagé. A cet effet, nous intégrerons les équations du mouvement suivant les axes y et z (3.235), puis nous en déduirons t afin de le substituer dans la solution pour x ainsi obtenue.

Substituant d'abord la solution déduite pour x (3.245) dans l'équation pour $\dot{y}$, on obtient l'équation à variables séparées

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{\sqrt{\frac{e^2E^2}{c^4}\left(ct - C_4\right)^2 + C_3^2}}\,, \tag{3.249}$$

et intégrant

$$y = \frac{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}{eE}\,\operatorname{arc\,sinh}\frac{eEt + m_{(0)}\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} + C_5\,, \tag{3.250}$$

où C_5 est une constante d'intégration. Avec $y = y_{(0)}$ à $t = 0$, on trouve

$$C_5 = y_{(0)} - \frac{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}{eE}\,\operatorname{arc\,sinh}\frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.251}$$

Substituant la constante dans y (3.250), il vient finalement

$$y = y_{(0)} + \frac{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}{eE} \times \\ \times \left\{ \operatorname{arc\,sinh}\frac{eEt + m_{(0)}\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} - \operatorname{arc\,sinh}\frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} \right\}. \tag{3.252}$$

Exprimant t à l'aide de y et $y_{(0)}$, et compte tenu de $a = \operatorname{arc\,sinh} b$,

$b = \sinh a$, et après avoir substitué la formule $\operatorname{arc\,sinh} b = \ln(b + \sqrt{b^2+1})$ dans le second terme, on a

$$t = \frac{1}{eE}\left\{ m_{(0)}c\sqrt{1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}} \times \right.$$
$$\left. \times \sinh\left[\frac{y-y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}eE + \ln\frac{\dot{x}_{(0)}+c}{c\sqrt{1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}}\right] - m_{(0)}\dot{x}_{(0)}\right\}. \tag{3.253}$$

Nous substituons maintenant cette valeur dans notre solution pour x (3.246). Il en résulte que les équations décrivant la trajectoire tridimensionnelle de la particule s'écrivent

$$x = x_{(0)} + \frac{m_{(0)}c^2}{eE}\sqrt{1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}} \times$$
$$\times \cosh\left\{\frac{y-y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}eE + \ln\frac{\dot{x}_{(0)}+c}{c\sqrt{1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}}\right\} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE}. \tag{3.254}$$

Les formules déduites impliquent qu'une particule chargée située dans notre Univers balayé par un champ électrique homogène et stationnaire se déplace en décrivant une courbe apparentée à une *chaînette*, tandis que les termes qui "dévient" de cette forme sont fonctions des conditions initiales.

Notre formule (3.254) coïncide formellement avec les résultats donnés dans la *Théorie des Champs*

$$x = \frac{m_{(0)}c^2}{eE}\cosh\frac{eEy}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c} \tag{3.255}$$

(formule 20.5 dans [10]), en ayant posé $x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} = 0$ et la vitesse initiale $\dot{x}_{(0)} = 0$. Cette dernière condition suggère que la constante d'intégration dans l'équation dynamique scalaire chr.inv. (théorème des forces vives), soit nulle, ce qui n'étant pas toujours vrai, reste ici un cas particulier.

Aux faibles vitesses après avoir annulé les termes relativistes, et en développant en séries le cosinus hyperbolique suivant $\cosh b = 1 + \frac{b^2}{2!} +$

$+\frac{b^4}{4!}+\frac{b^6}{6!}+\ldots$, notre équation décrivant la trajectoire tridimensionnelle de la particule (3.254), prend la forme (en négligeant les termes d'ordre supérieur)

$$x = x_{(0)} + \frac{eE\left(y - y_{(0)}\right)^2}{2m_{(0)}\dot{y}_{(0)}^2}\,, \tag{3.256}$$

d'où l'on voit que la particule se déplace en décrivant une *parabole*. Par suite, une fois annulées les coordonnées initiales de la particule, (3.256) coïncide avec le résultat indiqué dans la *Théorie des Champs*

$$x = \frac{eEy^2}{2m_{(0)}\dot{y}_{(0)}^2}\,. \tag{3.257}$$

L'intégration de l'équation du mouvement suivant l'axe z donne un résultat identique. Cela provient de la seule différence existante entre les équations par rapport à $\dot{y}$ et $\dot{z}$ (3.235), à savoir un coefficient fixe — la constante d'intégration (3.236), qui est égal à l'impulsion initiale de la particule suivant y (dans l'équation pour $\dot{y}$), et suivant z (dans l'équation pour $\dot{z}$).

Trouvons maintenant les propriétés de la particule (son énergie et son impulsion), modifiées sous l'action du champ électrique homogène et stationnaire. Compte tenu des conditions assumées ici, on calcule la racine carré relativiste

$$\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}} = \frac{m_{(0)}\sqrt{1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2+\dot{y}_{(0)}^2+\dot{z}_{(0)}^2}{c^2}}}{m_{(0)}+\frac{eE}{c^2}\left(x-x_{(0)}\right)}\,, \tag{3.258}$$

et on obtient l'énergie de la particule

$$E = \frac{m_{(0)}c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \frac{m_{(0)}c^2 + eE\left(x - x_{(0)}\right)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}_{(0)}^2+\dot{y}_{(0)}^2+\dot{z}_{(0)}^2}{c^2}}}\,, \tag{3.259}$$

qui, à une vitesse beaucoup plus faible que celle de la lumière, s'écrit

$$E = m_{(0)}c^2 + eE\left(x - x_{(0)}\right). \tag{3.260}$$

L'impulsion relativiste de la particule s'obtient de la même façon, mais en raison de sa complexité, ce résultat ne sera pas reproduit ici.

Nous avons donc analysé ici le mouvement d'une particule chargée dans notre Univers balayé par un champ électrique homogène et stationnaire.

Nous allons maintenant considérer le mouvement d'une particule analogue astreint aux mêmes contraintes, dans l'Univers miroir. Compte tenu de ces contraintes sur la structure géométrique de l'espace, les équations du mouvement chr.inv. de la particule de l'Univers miroir s'écrivent

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{e}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau}\,, \tag{3.261}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) = -\frac{e}{c}\frac{dq^i}{d\tau}\,. \tag{3.262}$$

En d'autres termes, la seule différence qui subsiste avec les équations de notre Univers (3.221, 3.222) est le signe dans le théorème des forces vives.

Nous supposons que le champ électrique est négatif (le champ *repousse* la particule), tout en considérant que cette particule se déplace suivant le vecteur du champ, et donc colinéaire à l'axe des x.

Par suite, en intégrant le théorème des forces vives pour la particule de l'Univers miroir (3.261), on obtient l'intégrale des forces vives

$$m = -\frac{eE}{c^2}\,x + B\,, \tag{3.263}$$

où la constante d'intégration calculée à partir des conditions initiales, est

$$B = m_{(0)} + \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,. \tag{3.264}$$

Substituant les résultats dans les équations vectorielles du mouvement chr.inv. (3.262), on a (comparer avec 3.233)

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} &= eE \\
-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} &= 0 \\
-\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{3.265}$$

Après un calcul algébrique similaire à celui qui nous a permis d'obtenir la trajectoire de la particule chargée de notre Univers, on parvient à

$$x = \frac{c^2}{eE}\left[B - \sqrt{C_3^2 - \frac{e^2E^2}{c^4}\left(ct - C_4\right)^2}\,\right], \tag{3.266}$$

où $C_3 = m_{(0)}\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}$ et $C_4 = -\frac{c\,m_{(0)}\,\dot{x}_{(0)}}{eE}$ ou encore,

$$x = -\sqrt{\left(\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\right)^2\left(1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}\right)-\left(ct+\frac{m_{(0)}c\,\dot{x}_{(0)}}{eE}\right)^2}+ \\ +\frac{m_{(0)}c^2}{eE}+x_{(0)}\,. \tag{3.267}$$

La coordonnée x de la charge repoussée par le champ obtenue dans l'Univers miroir, correspond dans notre Univers à une particule chargée qui est *attirée* par le champ (3.247), lorsque le vecteur champ électrique est positif $E_1 = E_x = E = conste$. De ce fait, on parvient ici à une conclusion intéressante : la transition de notre Univers vers l'Univers miroir, équivaut au changement de signe de la charge. Il est digne d'intérêt qu'une conclusion identique peut être déduite pour ce qui concerne la masse des particules, le signe de celle-ci s'inversant lors de ce passage.

Trouvons maintenant la trajectoire tridimensionnelle de la particule chargée dans l'Univers miroir balayé par un champ électrique homogène et stationnaire. Calculant y de la même manière que pour la particule appartenant à notre Univers, il vient

$$y = y_{(0)} + \frac{m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,c}{eE}\times \\ \times\left\{\arcsin\frac{eEt+m_{(0)}\,\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}\,c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}-\arcsin\frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\right\}. \tag{3.268}$$

Contrairement à l'équation se rapportant à la particule associée à notre Univers (3.252), cette formule contient un arcsinus habituel et un signe "plus" sous la racine carrée.

A partir de là, on peut exprimer le temps t à l'aide des coordonnées y et $y_{(0)}$

$$t = \frac{1}{eE}\left\{m_{(0)}\,c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}\times \right. \\ \left. \times\sin\left[\frac{y-y_{(0)}}{m_{(0)}\,\dot{y}_{(0)}\,c}\,eE+\ln\frac{\dot{x}_{(0)}+c}{c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\right]-m_{(0)}\,\dot{x}_{(0)}\right\}, \tag{3.269}$$

et après substitution dans notre formule pour x (3.267), on obtient la formule finale de la trajectoire

$$x = x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE}\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}} \times \\ \times \cos\left\{\frac{y-y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}\,eE + \arcsin\frac{\dot{x}_{(0)}}{c\sqrt{1+\frac{\dot{x}^2_{(0)}}{c^2}}}\right\} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE}\,. \tag{3.270}$$

Le mouvement de la particule est celle de *l'oscillateur harmonique.* Une fois posées les coordonnées initiales de la particule égales à zéro, ainsi que la vitesse initiale $\dot{x}_{(0)} = 0$, avec la constante d'intégration $B = 0$, l'équation de la trajectoire prend la forme simple

$$x = -\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\,\cos\frac{eEy}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}\,. \tag{3.271}$$

Aux faibles vitesses, après avoir annulé tous les termes relativistes, et développant en séries le cosinus suivant $\cos b = 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \ldots \approx 1 - \frac{b^2}{2!}$ (ce qui est applicable aux petites portions de la trajectoire), notre formule (3.270) devient

$$x = x_{(0)} + \frac{eE\left(y-y_{(0)}\right)^2}{2m_{(0)}\dot{y}^2_{(0)}}\,, \tag{3.272}$$

qui est l'équation d'une parabole. Donc, la particule chargée caractérisée par une faible vitesse dans l'Univers miroir, se déplace en décrivant une *parabole*, tout comme la particule appartenant à notre Univers où règne les mêmes contraintes du champ.

En fin de comptes, dans les champs électriques stationnaires, une particule chargée associée à notre Univers, se déplace en suivant une ligne du type chaînette, qui à faibles vitesses, se réduit à une parabole. Une particule analogue de l'Univers miroir se déplace suivant une trajectoire harmonique, qui partiellement, se réduit aussi à une parabole aux faibles vitesses. (comme dans le cas de notre Univers).

§ 3.12 Mouvement dans un champ magnétique stationnaire

Considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique en l'absence de contribution électrique, et dont la composante magnétique est stationnaire. Dans ce cas, les vecteurs chr.inv.

des champs électrique et magnétique s'écrivent

$$E_i = \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2}\,F_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2}\,\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} = 0\,, \tag{3.273}$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn} H_{mn} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c}\,A_{mn}\right) \neq 0 \tag{3.274}$$

car alors le champ étant strictement magnétique $\varphi = conste$ $(E_i = 0)$, les effets gravitationnels peuvent être négligés. A partir de (3.274), on voit que le vecteur H^{*i} n'est pas nul, si une des conditions suivantes s'applique :

a) Le potentiel q^i est rotationnel ;

b) L'espace est non holonome $(A_{ik} \neq 0)$.

Nous nous proposons d'évaluer le mouvement de la particule dans le cas général, où ces deux conditions sont réunies simultanément (ultérieurement, l'espace non holonome nous servira dans le cadre de notre étude sur les particules à spin). Comme au §3.11, nous supposons qu'il n'existe pas de déformation d'espace, et où $g_{ik} = \delta_{ik}$. Dans ce cas, la métrique observable $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k$ n'est pas galiléenne, car un espace non holonome est caractérisé par $h_{ik} \neq -g_{ik}$.

Autour de l'axe z, l'espace est ici considéré en rotation à la vitesse angulaire constante $\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \Omega$. La vitesse linéaire correspondante $v_i = \Omega_{ik} x^k$ possède deux composantes non nulles $v_1 = \Omega y$ et $v_2 = -\Omega x$. Tandis que le tenseur de non holonomicité n'a qu'une composante non nulle $A_{12} = -A_{21} = -\Omega$. Dans ce cas, la métrique prend la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\,\Omega\, y\, dt\, dx + 2\,\Omega\, x\, dt\, dy - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3.275}$$

Dans cet espace, $F_i = 0$ et $D_{ik} = 0$. Au paragraphe précédent §3.11, on a examiné la charge se déplaçant dans un champ électrique stationnaire en supposant la nullité des symboles de Christoffel. En d'autres termes, le mouvement était envisagé dans l'espace de Minkowski rapporté à un référentiel galiléen. Dans ce paragraphe au contraire, la 3-métrique observable h_{ik} n'est pas euclidienne, car la rotation d'espace et les symboles de Christoffel Δ^i_{jk} (1.47) ne sont pas nuls.

Si la vitesse linéaire de la rotation d'espace, n'est pas infinitésimale par rapport à la vitesse de la lumière, les composantes du tenseur métrique chr.inv. h_{ik} sont

$$h_{11} = 1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\,,\quad h_{22} = 1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\,,\quad h_{12} = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}\,,\quad h_{33} = 1\,, \tag{3.276}$$

son déterminant et les composantes de h^{ik} s'écrivent donc

$$h = \det \|h_{ik}\| = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 1 + \frac{\Omega^2\left(x^2+y^2\right)}{c^2}\,, \tag{3.277}$$

$$\left.\begin{aligned} h^{11} &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{\Omega^2x^2}{c^2}\right), & h^{22} &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{\Omega^2y^2}{c^2}\right) \\ h^{12} &= \frac{\Omega^2xy}{hc^2}\,, & h^{33} &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{3.278}$$

Corrélativement, on obtient les composantes non nulles des symboles de Christoffel chr.inv. Δ^i_{jk} (1.47), à savoir

$$\Delta^1_{11} = -\frac{2\Omega^4xy^2}{c^4\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,, \tag{3.279}$$

$$\Delta^1_{12} = \frac{\Omega^2y\left(1+\frac{2\Omega^2x^2}{c^2}\right)}{c^2\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,, \tag{3.280}$$

$$\Delta^1_{22} = -\frac{2\Omega^2x}{c^2}\,\frac{1+\frac{\Omega^2x^2}{c^2}}{1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}}\,, \tag{3.281}$$

$$\Delta^2_{11} = -\frac{2\Omega^2y}{c^2}\,\frac{1+\frac{\Omega^2y^2}{c^2}}{1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}}\,, \tag{3.282}$$

$$\Delta^2_{12} = \frac{\Omega^2x\left(1+\frac{\Omega^2y^2}{c^2}\right)}{c^2\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,, \tag{3.283}$$

$$\Delta^2_{22} = -\frac{2\Omega^4x^2y}{c^4\left[1+\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}\right]}\,. \tag{3.284}$$

Nous allons maintenant résoudre les équations chr.inv. du mouvement d'une particule chargée se déplaçant dans un champ magnétique stationnaire à l'intérieur d'un espace pseudo-riemannien. Pour faciliter les calculs, nous supposerons que le 4-potentiel A^α est tangent à la trajectoire quadridimensionnelle de la particule. Puisque la composante du champ électrique $E_i = 0$, ne fournit aucun travail les membres de droite des équations dynamiques chr.inv. s'annulent. Appliquant les équations

chr.inv. du mouvement d'une particule chargée (3.208, 3.209) à celle se déplaçant dans le champ magnétique stationnaire engendré dans notre Univers, on trouve

$$\frac{dm}{d\tau} = 0\,, \tag{3.285}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2mA_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k + m\Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,, \tag{3.286}$$

alors que pour une particule analogue se déplaçant dans un champ identique engendré lui, dans l'Univers miroir, on a

$$-\frac{dm}{d\tau} = 0\,, \tag{3.287}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + m\Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{3.288}$$

Le théorème des forces vives appliqué à la particule de notre Univers et à celle de l'Univers miroir, conduit respectivement aux équations

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = conste = B\,, \quad -m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = conste = \widetilde{B}\,, \tag{3.289}$$

où B et $\widetilde{B}$ sont des constantes d'intégration. Il en résulte que $\mathrm{v}^2 = conste$, et en l'absence de la composante électrique du champ électromagnétique, le module de la vitesse observable de la particule demeure inchangé. Les équations vectorielles chr.inv. du mouvement de la particule attachée à notre Univers (3.288) sont

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} + 2A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k + \Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\frac{e}{mc}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,, \tag{3.290}$$

tandis que celles de l'Univers miroir (3.288) sont identiques au terme $2A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k$ près

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} + \Delta_{nk}^i\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\frac{e}{mc}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\,. \tag{3.291}$$

Le vecteur magnétique est ici défini par les équations de Maxwell pour les champs stationnaires (3.215, 3.216), qui, en l'absence de vecteur électrique sont astreints aux conditions précipitées, et s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*m}H^{*m} = -2\pi c\rho \\ &\varepsilon^{ikm}\,{}^*\nabla_k\left(H_{*m}\sqrt{h}\right) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h} \end{aligned}\right\}\quad \mathrm{I}\,, \tag{3.292}$$

$$\left.\ {}^*\nabla_i H^{*i} = \frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,H^{*i} = 0\ \right\}\ \mathrm{II}\,. \tag{3.293}$$

De la première équation du 1er groupe, on voit immédiatement que le produit scalaire du pseudo-vecteur d'espace non holonome, et du pseudo-vecteur magnétique, est seulement fonction de la densité de charge. Si cette densité satisfait $\rho = 0$, les pseudo-vecteurs Ω_{*i} et H^{*i} sont orthogonaux.

Par suite, nous sommes amenés à envisager 2 orientations possibles du vecteur magnétique par rapport au pseudo-vecteur de non holonomicité d'espace.

a) Le champ magnétique est colinéaire au champ non holonome

Nous supposons que le pseudo-vecteur magnétique H^{*i}, est dirigé suivant l'axe z, c'est-à-dire dans la même direction que le pseudo-vecteur des vitesses angulaires de rotation d'espace $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm} A_{km}$.

Le pseudo-vecteur des rotations d'espace ne possède alors qu'une composante non nulle $\Omega^{*3} = \Omega$, tandis que le pseudo-vecteur magnétique possède lui

$$\begin{aligned} H^{*3} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{3mn} H_{mn} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{312} H_{12} + \varepsilon^{321} H_{21}\right) = H_{12} = \\ = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right) + \frac{2\varphi}{c}\,\Omega\,. \end{aligned} \tag{3.294}$$

La condition $\varphi = conste$ résulte de l'absence de la composante du champ électrique. Le 1er groupe des équations de Maxwell (2.392) devient dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*3} H^{*3} = \frac{\Omega\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right) + \frac{2\varphi\,\Omega^2}{c} = -2\pi c\rho \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(H_{*3}\sqrt{h}\right) = \frac{4\pi}{c}\,j^1\sqrt{h} \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(H_{*3}\sqrt{h}\right) = \frac{4\pi}{c}\,j^2\sqrt{h} \\ &j^3 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.295}$$

Le deuxième groupe d'équations (3.293) se révèle trivial en se réduisant à $\frac{\partial H^{*3}}{\partial z} = 0$, d'où $H^{*3} = conste$. En fait, ceci implique que le champ magnétique stationnaire envisagé soit homogène le long de z. Nous supposerons par la suite que le champ magnétique est homogène et stationnaire au sens strict, c'est-à-dire $H^{*i} = conste$. De la première équation

du 1er groupe (3.295), on déduit que le champ est homogène si les deux conditions sont vérifiées

$$\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right) = conste, \tag{3.296a}$$

$$\rho = -\frac{\varphi\,\Omega^2}{\pi c^2} = conste. \tag{3.296b}$$

Donc la densité de charge $\rho > 0$ si le potentiel scalaire $\varphi < 0$, et les autres équations du 1er groupe (3.295), s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} j^1 &= \frac{c}{4\pi}\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial y} \\ j^2 &= \frac{c}{4\pi}\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x} \\ j^3 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.297}$$

Puisque $h = 1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}$ (3.277), il en résulte que dans le champ magnétique homogène et stationnaire, le vecteur courant est non nul, si l'espace est caractérisé par un champ holonome intense, c'est-à-dire si la vitesse de rotation de cet espace est comparable à la vitesse de la lumière. Dans un champ non holonome faible $h = 1$, et donc on a $j^1 = j^2 = 0$.

Exprimons maintenant le vecteur magnétique à partir des équations de Maxwell (3.295) en écrivant les équations vectorielles chr.inv. du mouvement pour les particules attachées à notre Univers (3.290, 3.291)

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{2\Omega}{h}\left[\frac{\Omega^2 xy\dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right] + \Delta^1_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^1_{12}\dot{x}\dot{y} + \\ &\qquad + \Delta^1_{22}\dot{y}^2 = -\frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right] \\ &\ddot{y} - \frac{2\Omega}{h}\left[\frac{\Omega^2 xy\dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\right] + \Delta^2_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^2_{12}\dot{x}\dot{y} + \\ &\qquad + \Delta^2_{22}\dot{y}^2 = \frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\right] \\ &\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{3.298}$$

et pour les particules de l'Univers miroir

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x} + \Delta^1_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^1_{12}\dot{x}\dot{y} + \Delta^1_{22}\,\dot{y}^2 = \\
&\qquad = -\frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right] \\
&\ddot{y} + \Delta^2_{11}\dot{x}^2 + 2\Delta^2_{12}\dot{x}\dot{y} + \Delta^2_{22}\,\dot{y}^2 = \\
&\qquad = \frac{eH}{mc}\left[-\frac{\Omega^2 xy\dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\right] \\
&\ddot{z} = 0
\end{aligned}\right\}. \tag{3.299}$$

On voit apparaître les termes de droite qui contiennent $\frac{\Omega^2}{c^2}$, car dans la rotation d'espace, la métrique chr.inv. h_{ik} n'est pas euclidienne. Par suite, dans le cas envisagé, nous devons distinguer la vitesse observable contravariante de sa contrepartie covariante. Les membres de droite incluent les composantes covariantes

$$\mathrm{v}_2 = h_{21}\mathrm{v}^1 + h_{22}\,\mathrm{v}^2 = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}\,\dot{x} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right)\dot{y}\,, \tag{3.300}$$

$$\mathrm{v}_1 = h_{11}\mathrm{v}^1 + h_{12}\,\mathrm{v}^2 = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}\,\dot{y} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right)\dot{x}\,. \tag{3.301}$$

En l'absence de rotation d'espace $\Omega = 0$, les équations chr.inv. du mouvement de la particule associée à notre Univers (3.298), coïncident au signe près avec les équations dynamiques dans un champ magnétique homogène et stationnaire décrites par Landau et Lifshitz (cf. *Théorie des Champs*, form. 21.2)

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.302}$$

Tandis que nos équations (3.298) impliquent que

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = \frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.303}$$

La différence provient du signe "plus" attribué par Landau et Lifshitz au vecteur magnétique de la force de Lorentz, alors que nos équations comportent le signe "moins" en raison de notre choix de la signature d'espace.

En présence de rotation d'espace (espace non holonome), les équations du mouvement incluront les tenseurs contenant Ω, $\frac{\Omega^2}{c^2}$, $\frac{\Omega^4}{c^4}$.

Nous pouvons néanmoins déterminer ici leur solution exacte pour un champ non holonome faible en négligeant les termes du second ordre. Dans ce cas, les équations du mouvement obtenues en (3.298, 3.299) pour les particules de notre Univers, se réduisent à

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = \frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,, \tag{3.304}$$

et celle se rapportant aux particules de l'Univers miroir

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = \frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.305}$$

Considérons d'abord les équations associées à notre Univers. Le long de z les équations s'intègrent immédiatement et donnent

$$z = \dot{z}_{(0)}\,\tau + z_{(0)}\,. \tag{3.306}$$

A l'instant initial, nous observons que la vitesse de la particule autour de z est nulle, et donc se déplace uniquement dans le plan $x\,y$. Les deux équations restantes (3.304) s'écrivent

$$\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -\,(2\Omega + \omega)\,\dot{y}\,, \qquad \frac{d\dot{y}}{d\tau} = (2\Omega + \omega)\,\dot{x}\,, \tag{3.307}$$

où par commodité, nous avons posé $\omega = \frac{eH}{mc}$. C'est la même notation qui a été employée au §21 de la *Théorie des Champs*. Si maintenant on formule $\dot{x}$ à l'aide de la deuxième équation, en substituant cette valeur dans la première, on obtient

$$\frac{d^2\dot{y}}{d\tau^2} + (2\Omega + \omega)^2\,\dot{y} = 0\,, \tag{3.308}$$

qui représente l'équation de l'oscillateur dont les solutions sont :

$$\dot{y} = C_1 \cos(2\Omega + \omega)\,\tau + C_2 \sin(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{3.309}$$

où $C_1 = \dot{y}_{(0)}$ et $C_2 = \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}$, sont les constantes d'intégration. Réinsérant $\dot{y}$ (3.309) dans la première équation (3.307), on obtient

$$\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -\,(2\Omega + \omega)\,\dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau - \ddot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{3.310}$$

ou après intégration

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau + C_3\,, \tag{3.311}$$

avec la constante d'intégration $C_3 = \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}$.

Ayant substitué toutes les constantes, les formules obtenues pour $\dot{x}$ (3.311) et $\dot{y}$ (3.309) deviennent finalement

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega+\omega)\,\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \cos(2\Omega+\omega)\,\tau + \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\,, \quad (3.312)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega+\omega)\,\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \sin(2\Omega+\omega)\,\tau\,. \quad (3.313)$$

Donc, les formules donnant les composantes de la vitesse de la particule $\dot{x}$ et $\dot{y}$ dans le champ magnétique homogène et stationnaire, sont les équations de l'oscillateur harmonique. Dans un espace où le champ holonome est faible, la fréquence sera $2\Omega+\omega = 2\Omega + \frac{eH}{mc}$.

A partir de l'intégrale des forces vives dans un champ magnétique stationnaire (3.289), on voit que le carré de la vitesse de la particule est une grandeur constante. Calculant $\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ pour la particule de notre Univers, on en déduit que la quantité

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^2 = \dot{x}^2_{(0)} + \dot{y}^2_{(0)} + \dot{z}^2_{(0)} + 2\left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\right) \times \\ \times \left[\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} + \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega+\omega)\,\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \cos(2\Omega+\omega)\,\tau\right] \end{aligned} \quad (3.314)$$

est constante ($\mathrm{v}^2 = \mathit{conste}$), sous la condition $C_3 = \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} = 0$.

Intégrant maintenant $\dot{x}$ et $\dot{y}$ par rapport à τ (c'est-à-dire intégrant les équations 3.312, 3.313), on obtient les coordonnées de la particule associée à notre Univers se déplaçant dans le champ magnétique homogène et stationnaire

$$\begin{aligned} x = \left[\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \sin(2\Omega+\omega)\,\tau - \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega+\omega)\,\tau\right] \frac{1}{2\Omega+\omega} + \\ + \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\right)\tau + C_4\,, \end{aligned} \quad (3.315)$$

$$y = \left[\dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega+\omega)\,\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} \cos(2\Omega+\omega)\,\tau\right] \frac{1}{2\Omega+\omega} + C_5\,, \quad (3.316)$$

où les constantes d'intégration sont

$$C_4 = x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\,, \qquad C_5 = y_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{(2\Omega+\omega)^2}\,. \quad (3.317)$$

D'après (3.315), on voit que la particule effectue des oscillations harmoniques le long de x, si l'équation $\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega} = 0$ est vérifiée. C'est

également la condition pour que le carré de la vitesse de la particule soit constant (3.314), c'est-à-dire que l'intégrale des forces vives est bien satisfaite. Compte tenu de ces résultats, on parvient à l'équation de la trajectoire de la particule dans le plan $x\,y$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = {} & \frac{1}{(2\Omega+\omega)^2}\left[\dot{y}_{(0)}^2+\frac{\ddot{y}_{(0)}^2}{(2\Omega+\omega)^2}\right]-\frac{2C_4}{2\Omega+\omega}\times \\ & \times\left[\dot{y}_{(0)}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau+\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau\right]+ \\ & +\left[\dot{y}_{(0)}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau+\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau\right]\times \\ & \times\frac{2C_5}{2\Omega+\omega}+C_4^2+C_5^2\,. \end{aligned} \tag{3.318}$$

A l'instant initial $\ddot{y}_{(0)}=0$, on considère que les constantes d'intégration C_4 et C_5 sont égales à zéro, et les équations (3.315, 3.316) se simplifient

$$x=-\frac{1}{2\Omega+\omega}\,\dot{y}_{(0)}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau\,, \tag{3.319}$$

$$y=\frac{1}{2\Omega+\omega}\,\dot{y}_{(0)}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau\,. \tag{3.320}$$

Compte tenu de ces formules, nos équations de la trajectoire (3.318) se réduisent à une simple équation du cercle

$$x^2+y^2=\frac{\dot{y}_{(0)}^2}{(2\Omega+\omega)^2}\,. \tag{3.321}$$

Par suite, si la vitesse initiale de la particule de notre Univers par rapport à la direction du champ magnétique homogène (l'axe z) est nulle, cette particule décrit dans un plan $x\,y$, un *cercle* de rayon

$$r=\frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}=\frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\frac{eH}{mc}}\,, \tag{3.322}$$

qui dépend étroitement du champ magnétique et de la rotation d'espace.

Si la vitesse initiale de la particule suivant la direction du champ magnétique n'est pas nulle, sa trajectoire est une *hélice* de rayon r. D'une façon générale, la particule décrit une *ellipse* dans le plan $x\,y$ (3.318) qui se déforme à partir du cercle en fonction des conditions initiales du mouvement.

Il est facile de voir que nos résultats coïncident avec ceux du §21 de la *Théorie des Champs*

$$x = -\frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau\,, \qquad y = \frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau\,, \tag{3.323}$$

lorsque $\Omega = 0$ (en l'absence de rotation d'espace). Dans ce cas particulier, le rayon $r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = \frac{mc}{eH}\,\dot{y}_{(0)}$ de la trajectoire de la particule ne dépend pas de la vitesse de rotation d'espace. Si $\Omega \neq 0$, le champ non holonome perturbe le mouvement de la particule dans le champ magnétique, et son effet s'ajoute à celui-ci par la correction 2Ω apportée au terme $\omega = \frac{eH}{mc}$ dans les équations. Dans un espace caractérisé par un champ holonome intense, où Ω est non négligeable devant la vitesse de la lumière, la perturbation est encore plus importante.

Par ailleurs, dans l'espace non holonome, l'argument des fonctions trigonométriques de nos équations contient la somme de deux termes, l'un déduit de l'interaction charge/champ magnétique, l'autre résultant de la rotation d'espace qui ne dépend ni de la charge électrique, ni de la présence du champ magnétique. On est alors conduit à envisager deux cas particuliers du mouvement de la charge dans un champ magnétique homogène et stationnaire, engendré dans un espace non holonome. Dans le premier cas, on envisage la particule électriquement neutre, en l'absence de champ magnétique ; son mouvement s'identifie alors à celui qui est soumis à la composante magnétique de la force de Lorentz, avec la différence notable que c'est la rotation d'espace 2Ω qui se substitue à $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Pour comprendre la signification de ce cas, il convient d'évaluer en toute première approximation le rapport de la vitesse angulaire de la rotation d'espace, au champ magnétique H. Le meilleur exemple est celui de l'atome, car à l'échelle des orbites électroniques, l'ordre de grandeur de l'intensité des interactions électromagnétiques est très proche de celles des autres interactions, en sachant que les vitesses orbitales des électrons sont très élevées.

On peut alors admettre l'approximation

$$\frac{eH}{mc} = -2\Omega\,, \tag{3.324}$$

où l'argument des fonctions trigonométriques dans les équations du mouvement s'évanouit.

Nous considérons le référentiel de l'observateur dont l'espace de référence sera attaché au noyau d'un atome. Le rapport caractéristique pour l'électron de cet atome qui nous concerne, s'écrit dans le système

d'unités de Gauss et CGSE

$$\frac{\Omega}{H} = -\frac{e}{2m_{\mathrm{e}}c} = -\frac{4.8\times10^{-10}}{18.2\times10^{-28}\ 3.0\times10^{10}} = \\ = -\,8.8\times10^{6}\ \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{-1/2}, \tag{3.325}$$

où le signe "moins" provient du fait que Ω et H dans (3.324) sont dirigés en sens inverse.

Nous résolvons maintenant les équations du mouvement de la particule appartenant à notre Univers balayé par un champ magnétique homogène et stationnaire (3.305), qui coïncident avec les équations écrites en l'absence d'espace non holonome

$$\ddot{x} = -\,\omega\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} = \omega\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3.326}$$

La solution de la troisième équation du mouvement (suivant z) est simplement l'intégrale $z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}$.

Les équations de la troisième équation dynamique suivant x et y, sont similaires à celles de notre particule d'univers, à la différence que l'argument des fonctions trigonométriques contient ω à la place de $\omega + 2\Omega$:

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \tag{3.327}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau\,. \tag{3.328}$$

On constate alors que les formules se rapportant aux composantes de la vitesse de la particule de l'Univers miroir $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont les équations de l'oscillateur harmonique de fréquence $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Par conséquent, leurs solutions, à savoir les formules des coordonnées de la particule de l'Univers miroir se déplaçant dans le champ magnétique homogène et stationnaire, s'écrivent

$$x = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - \dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau\right) + \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\right)\tau + C_4\,, \tag{3.329}$$

$$y = \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right) + C_5\,, \tag{3.330}$$

où les constantes d'intégration sont

$$C_4 = x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \qquad C_5 = y_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega^2}\,. \tag{3.331}$$

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, l'intégrale des forces vives dans les champs magnétiques stationnaires (3.289) implique que la masse relativiste de la particule dans ces champs soit constante, ainsi que le carré de sa vitesse observable. Exprimant alors les solutions pour les vitesses de la particule dans l'Univers miroir, c'est-à-dire, élevant au carré les grandeurs $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ et en sommant, on voit que

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^2 &= \dot{x}^2_{(0)} + \dot{y}^2_{(0)} + \dot{z}^2_{(0)} + \\ &+ 2\left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\right)\left(\frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} + \dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right) \end{aligned} \tag{3.332}$$

soit constant, $\mathrm{v}^2 = \mathit{conste}$, à condition que

$$\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} = 0\,. \tag{3.333}$$

D'après la formule écrite pour x (3.329), on constate que la particule effectue des oscillations harmoniques strictes suivant x, sous la même condition (3.333). Compte tenu de cette circonstance, et élevant au carré x (3.329) et y (3.330), puis sommant pour la particule associée à l'Univers miroir dans le champ magnétique homogène et stationnaire, on obtient sa trajectoire dans le plan $x\,y$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\dot{y}^2_{(0)} + \frac{\ddot{y}^2_{(0)}}{\omega^2}\right) - \frac{2C_4}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau\right) + \\ + \left(\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right)\frac{2C_5}{\omega} + C_4^2 + C_5^2\,. \end{aligned} \tag{3.334}$$

Cette trajectoire diffère de celle de la particule de notre Univers (3.318), uniquement par le terme $\omega + 2\Omega$ qui se réduit ici à ω, et par les valeurs numériques des constantes d'intégration (3.331). Par suite, une particule chargée dont la vitesse initiale est nulle suivant z (direction du champ magnétique), se déplace en décrivant une *ellipse* dans le plan $x\,y$.

Une fois posées $\ddot{y}_{(0)}$, et les constantes C_4 et C_5 égales à zéro, les solutions se simplifient notablement

$$x = -\frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau\,, \qquad y = \frac{1}{\omega}\,\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau\,. \tag{3.335}$$

Dans un tel cas particulier, la particule de l'Univers miroir qui est au repos par rapport à la direction du champ, décrit un *cercle* dans le plan $x\,y$

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}^2_{(0)}}{\omega^2} \tag{3.336}$$

dont le rayon est $r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = \frac{mc}{eH}\,\dot{y}_{(0)}$. Par conséquent, si la vitesse initiale de la particule suivant la direction du champ magnétique (axe z) est non nulle, celle-ci décrit une *hélice* autour de la direction du champ magnétique. On en conclut alors que le mouvement des particules chargées dans un champ magnétique homogène et stationnaire de l'Univers miroir est identique à celui d'une particule chargée associée à notre Univers, en l'absence d'espace non holonome.

B) Le champ magnétique est orthogonal au champ non holonome

Nous allons maintenant examiner le cas où le pseudo-vecteur H^{*i} du champ magnétique, est orthogonal au pseudo-vecteur $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm} A_{km}$ du champ d'espace non holonome

$$H^{*2} = H_{31} = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}\right) = conste\,. \tag{3.337}$$

Alors, si le champ non holonome est faible, les équations du mouvement de la particule de notre Univers s'écrivent

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eH}{mc}\,\dot{z}\,, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0\,, \quad \ddot{z} = -\frac{eH}{mc}\,\dot{x}\,, \tag{3.338}$$

ou en posant $\omega = \frac{eH}{mc}$,

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \omega\dot{z}\,, \qquad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -\omega\dot{x}\,. \tag{3.339}$$

Différentiant la première équation par rapport à τ, et substituant $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$ dans la seconde et la troisième équation, il vient

$$\dddot{x} + \left(4\Omega^2 + \omega^2\right)\dot{x} = 0\,. \tag{3.340}$$

Posant $\dot{x} = p$, on parvient à l'équation de l'oscillateur

$$\ddot{p} + \widetilde{\omega}^2 p = 0\,, \qquad \widetilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\,, \tag{3.341}$$

dont la solution est

$$p = C_1 \cos\widetilde{\omega}\tau + C_2 \sin\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{3.342}$$

où $C_1 = \dot{x}_{(0)}$ et $C_2 = \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}$ sont les constantes d'intégration. Nous intégrons maintenant $\dot{x} = p$ par rapport à τ, et l'on obtient les expressions pour x

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}} \sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} \cos\widetilde{\omega}\tau + x_{(0)} + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\,, \tag{3.343}$$

où $x_{(0)} + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_3$ est encore une constante d'intégration.

Substituant alors $\dot{x} = p$ (3.342) dans les équations du mouvement en termes de y et z (3.339), puis intégrant, il vient

$$\dot{y} = \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\,, \tag{3.344}$$

$$\dot{z} = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\,, \tag{3.345}$$

où $\dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_4$ et $\dot{z}_{(0)} - \frac{\omega\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_5$ sont de nouvelles constantes d'intégration. Intégrant une fois encore les équations (3.344, 3.345) par rapport à τ, on obtient les formules finales pour y et z

$$\begin{aligned} y = -\frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{y}_{(0)}\tau + \\ + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\tau + y_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}\,, \end{aligned} \tag{3.346}$$

$$\begin{aligned} z = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{z}_{(0)}\tau - \\ - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\tau + z_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}\,, \end{aligned} \tag{3.347}$$

avec $y_{(0)} + \frac{2\Omega\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_6$ et $z_{(0)} - \frac{\omega\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2} = C_7$.

A la condition que $\Omega = 0$ (absence de rotation d'espace), et en supposant nulles certaines constantes d'intégration, on observe que les équations précédentes coïncident parfaitement avec celles bien connues de l'électrodynamique relativiste dans le cas où un champ magnétique stationnaire est dirigé suivant l'axe z

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \quad y = y_{(0)} + \dot{y}_{(0)}\tau\,, \quad z = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\cos\widetilde{\omega}\tau\,. \tag{3.348}$$

L'intégrale des forces vives implique la constance du carré de la vitesse observable d'une charge se déplaçant dans un champ magnétique stationnaire, ce qui offre donc la possibilité de calculer $\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^2 = \dot{x}_{(0)}^2 + \dot{y}_{(0)}^2 + \dot{z}_{(0)}^2 + \frac{2}{\widetilde{\omega}}\left(\ddot{x}_{(0)} + 2\Omega\,\dot{y}_{(0)} - \omega\dot{z}_{(0)}\right) \times \\ \times \left(\frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}} + \dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\cos\widetilde{\omega}\tau\right), \end{aligned} \tag{3.349}$$

et donc $\mathrm{v}^2 = \mathit{conste}$, à condition que

$$\ddot{x}_{(0)} + 2\Omega\,\dot{y}_{(0)} - \omega\dot{z}_{(0)} = 0\,. \tag{3.350}$$

On peut déterminer la trajectoire spatiale de la particule en calculant $x^2+y^2+z^2$, de telle façon à obtenir l'équation

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}^2+\frac{\ddot{x}_{(0)}^2}{\widetilde{\omega}^2}\right)+C_3^2+C_6^2+C_7^2+ \\ &+\left(C_4^2+C_5^2\right)\tau^2+2\left(C_4C_6+C_5C_7\right)\tau+\Big[\left(\omega C_7-2\Omega C_6\right)+ \\ &+2\left(\omega C_5-2\Omega C_6\right)\tau\Big]\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau+\frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right)\frac{1}{\widetilde{\omega}^2}+ \\ &+\frac{2C_3}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau-\frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right), \end{aligned} \tag{3.351}$$

qui inclut un terme linéaire (par rapport au temps) et un terme quadratique, ainsi qu'un terme paramétrique et deux expressions harmoniques. Dans le cas particulier où les constantes d'intégration sont toutes nulles, la formule obtenue (3.351) prend la forme de l'équation d'une *sphère régulière*

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}^2+\frac{\ddot{x}_{(0)}^2}{\widetilde{\omega}^2}\right), \tag{3.352}$$

dont le rayon est

$$r=\frac{1}{\widetilde{\omega}}\sqrt{\dot{x}_{(0)}^2+\frac{\ddot{x}_{(0)}^2}{\widetilde{\omega}^2}}\,, \tag{3.353}$$

et où $\widetilde{\omega}=\sqrt{4\Omega^2+\omega^2}=\sqrt{4\Omega^2+\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}$.

Par conséquent, dans notre Univers empli d'un champ magnétique homogène et stationnaire orthogonal au champ non holonome de l'espace, la particule chargée se déplace à la surface d'une *sphère* dont le rayon dépend du vecteur champ magnétique et de la vitesse angulaire de rotation d'espace.

Dans le cas particulier, où le champ non holonome est absent, et l'accélération initiale est nulle, notre équation de la trajectoire se simplifie notablement en se réduisant à l'équation d'une sphère

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\omega^2}\,\dot{x}_{(0)}^2\,,\qquad r=\frac{1}{\omega}\,\dot{x}_{(0)}=\frac{mc}{eH}\,\dot{x}_{(0)} \tag{3.354}$$

dont le rayon dépend uniquement de l'interaction de la charge avec le champ magnétique — résultat bien connu en électrodynamique (cf. *Théorie des Champs* §21).

Pour une particule de l'Univers miroir se déplaçant dans un champ magnétique homogène et stationnaire qui est orthogonal au champ non

holonome, on trouve les équations du mouvement sous la forme

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc}\dot{z}, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = -\frac{eH}{mc}\dot{x}\,. \tag{3.355}$$

Celles-ci diffèrent des équations de la particule de notre Univers (3.338), par l'absence de termes relatifs à la vitesse angulaire Ω de rotation d'espace.

§ 3.13 Mouvement dans un champ électromagnétique stationnaire

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier le mouvement d'une particule chargée soumise à l'influence combinée des composantes magnétique et électrique d'un champ électromagnétique stationnaire.

Nous considérerons un espace non holonome en rotation autour de l'axe z à la vitesse angulaire constante $\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \Omega$, donc correspondant à la métrique (3.275). Dans un tel espace, $F_i = 0$, et $D_{ik} = 0$, et nous résoudrons le problème en supposant un champ non holonome faible qui implique que le 3-espace soit muni d'une métrique euclidienne.

Ici, les équations de Maxwell pour les champs stationnaires (3.215, 3.216) sont

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*m} H^{*m} = -2\pi c\rho \\ &\varepsilon^{ikm}\,\nabla_k\big(H_{*m}\sqrt{h}\big) = \frac{4\pi}{c}\,j^i\sqrt{h} = 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}\,, \tag{3.356}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{*m} E^m = 0 \\ &\varepsilon^{ikm}\,\nabla_k\big(E_m\sqrt{h}\big) = 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}\,, \tag{3.357}$$

car la condition d'homogénéité observable du champ équivaut à l'annulation de sa dérivée chr.inv. [9,11–13]. Dans le cas particulier envisagé ici, les symboles de Christoffel étant nuls (métrique galiléenne), la dérivée chr.inv. se confond avec la dérivée usuelle. Les équations de Maxwell impliquent donc que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) Le pseudo-vecteur de non holonomicité d'espace et le vecteur champ électrique sont orthogonaux $\Omega_{*m} E^m = 0$;
b) Le pseudo-vecteur de non holonomicité d'espace et le vecteur champ magnétique sont orthogonaux. Ici, la densité de charge est nulle ($\rho = 0$) ;
c) Le courant du champ électromagnétique est absent ($j^i = 0$).

Cette dernière condition implique que la présence de courants du champ électromagnétique, traduit l'inhomogénéité du champ magné-

tique actif.

Nous devons donc envisager le mouvement de la particule pour deux cas d'orientations des champs :

1) $\vec{H} \perp \vec{E}$ et $\vec{H} \parallel \vec{\Omega}$;
2) $\vec{H} \parallel \vec{E}$ et $\vec{H} \perp \vec{\Omega}$.

En ayant préalablement posé que le vecteur champ électrique est colinéaire à l'axe des x. Par rapport à la métrique de fond (3.275), le pseudo-vecteur des rotation d'espace est colinéaire à l'axe des z. Par suite, dans le premier cas, le vecteur magnétique est aussi colinéaire à z, alors qu'il est colinéaire à x dans le deuxième cas.

Lorsque le vecteur champ électrique est colinéaire à x, les équations chr.inv. du mouvement d'une particule chargée dans notre Univers balayé par un champ électromagnétique stationnaire, s'écrivent

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{eE_1}{c^2}\frac{dx}{d\tau}\,, \tag{3.358}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2mA_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right), \tag{3.359}$$

et pour l'Univers miroir

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{eE_1}{c^2}\frac{dx}{d\tau}\,, \tag{3.360}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) = -\,e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \tag{3.361}$$

Comme nous l'avons fait précédemment, nous envisagerons le cas d'une particule *réfléchie* (ou *repoussée*) par le champ. Les composantes du vecteur champ électrique E_i colinéaire à x, sont (indices covariants/ contravariants confondus)

$$E_1 = E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = conste = -E\,, \qquad E_2 = E_3 = 0\,. \tag{3.362}$$

Le théorème des forces vives fournit ensuite par intégration les solutions respectives inhérentes à notre Univers et à l'Univers miroir, qui s'écrivent

$$m = \frac{eE}{c^2}x + B\,, \qquad m = -\frac{eE}{c^2}x + \widetilde{B}\,, \tag{3.363}$$

où B est la constante d'intégration de notre Univers et $\widetilde{B}$, celle de l'Univers miroir. Calculons ces constantes à l'instant initial $\tau = 0$, on obtient

$$B = m_{(0)} - \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,, \qquad \widetilde{B} = m_{(0)} + \frac{eE}{c^2}\,x_{(0)}\,, \tag{3.364}$$

où $m_{(0)}$ est la masse relativiste de la particule et $x_{(0)}$ son déplacement à l'instant initial.

En examinant les intégrales (3.363), on voit que les différences entre les 3 cas considérés (orientations de $\vec{H}$, $\vec{E}$, et $\vec{\Omega}$) se manifestent dans les équations vectorielles chr.inv., tandis que les équations scalaires chr.inv. (3.358, 3.360) et leur solutions (3.363) restent inchangées.

Notons que le vecteur $\vec{E}$ peut être dirigé le long de l'axe y, mais pas suivant l'axe z. Cette circonstance est due à ce que dans l'espace caractérisé par notre métrique particulière, et qui est colinéaire à z, le pseudo-vecteur de non holonomicité $\vec{\Omega}$ doit être orthogonal à $\vec{E}$, de par la définition même du 2ème groupe des équations de Maxwell.

Tenant compte des résultats obtenus pour le théorème des forces vives (3.363), nous allons écrire les équations vectorielles chr.inv. pour tous les cas envisagés.

Cas 1. Nous supposons ici que $\vec{H} \perp \vec{E}$ et $\vec{H} \parallel \vec{\Omega}$, donc le champ magnétique $\vec{H}$ est orienté suivant l'axe z (parallèle au champ non holonome).

Dans ce cas, de toutes les composantes du champ magnétique, la seule composante non nulle est

$$H^{*3} = H_{12} = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x}\right) + \frac{2\varphi}{c} A_{12} = conste = H\,. \tag{3.365}$$

Par conséquent, les équations vectorielles du mouvement chr.inv. de la particule appartenant à notre Univers s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{x} + 2\Omega\dot{y}) = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y}\\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{y} - 2\Omega\dot{x}) = \frac{eH}{c}\,\dot{x}\\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0
\end{aligned}\right\}, \tag{3.366}$$

et pour l'Univers miroir

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y}\\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = \frac{eH}{c}\,\dot{x}\\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = 0
\end{aligned}\right\}. \tag{3.367}$$

Par ailleurs, le 1er groupe des équations de Maxwell exige que soient vérifiées les conditions

$$\Omega_{*3} H^{*3} = -2\pi c\rho\,, \tag{3.368}$$

où $\Omega_{*3} = \Omega = conste$ et $H^{*3} = H = conste$. De cette formule, on déduit la condition évidente : l'orientation mutuelle envisagée du pseudo-vecteur de non holonomicité et du champ magnétique, n'est possible qu'en présence de charges dans cet espace, c'est-à-dire pour $\rho \neq 0$.

Cas 2. $\vec{H} \parallel \vec{E}$, $\vec{H} \perp \vec{\Omega}$, et $\vec{E} \perp \vec{\Omega}$, donc les vecteurs magnétiques et électriques sont colinéaires suivant l'axe x, alors que le champ non holonome est toujours dirigé le long de z.

Ici, de toutes les composantes du champ magnétique, seule la première n'est pas nulle

$$H^{*1} = H_{23} = \frac{\varphi}{c}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial y}\right) = conste = H. \tag{3.369}$$

A l'aide de cette formule, on obtient les équations vectorielles chr.inv. du mouvement de la charge appartenant à notre Univers

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{x} + 2\Omega\dot{y}) = eE \\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)(\ddot{y} - 2\Omega\dot{x}) = -\frac{eH}{c}\,\dot{z} \\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = \frac{eH}{c}\,\dot{y}
\end{aligned}\right\}, \tag{3.370}$$

et celles se rapportant à la particule de l'Univers miroir

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}^2 + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{x} = eE \\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{y} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{y} = -\frac{eH}{c}\,\dot{z} \\
&\frac{eE}{c^2}\,\dot{x}\dot{z} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2}\,x\right)\ddot{z} = \frac{eH}{c}\,\dot{y}
\end{aligned}\right\}. \tag{3.371}$$

Ayant ainsi établi les équations du mouvement de la particule chargée pour les trois cas d'orientations mutuelles des champs stationnaires actifs (électromagnétique et non holonome), nous devons maintenant chercher à les résoudre.

a) Le champ magnétique est orthogonal au champ électrique et parallèle au champ non holonome

Nous résolvons les équations vectorielles chr.inv. du mouvement de la particule chargée (3.366, 3.367) à l'approximation non relativiste (la valeur absolue de la vitesse observable est négligeable devant la vitesse de la lumière). Nous pouvons donc supposer que la masse de cette particule à l'instant initial, est égale à sa masse au repos

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \cong m_0 \,. \tag{3.372}$$

De plus, nous supposons que le champ électrique est également négligeable, et donc omettre le terme $\frac{eEx}{c^2}$. Dans ces conditions, les équations vectorielles du mouvement chr.inv. se présentent sous deux formes : pour la particule de notre Univers

$$m_0\,(\ddot{x}+2\Omega\dot{y}) = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y}\,,\;\; m_0\,(\ddot{y}-2\Omega\dot{x}) = \frac{eH}{c}\,\dot{x}\,,\;\; m_0\ddot{z} = 0\,, \tag{3.373}$$

pour la particule de l'Univers miroir

$$m_0\ddot{x} = eE - \frac{eH}{c}\,\dot{y}\,, \qquad m_0\ddot{y} = \frac{eH}{c}\,\dot{x}\,, \qquad m_0\,\ddot{z} = 0\,. \tag{3.374}$$

Ces équations coïncident avec celles obtenues au §22 de la *Théorie des Champs* [10], dans le cas particulier d'un espace holonome ($\Omega = 0$), et pour le vecteur champ électrique dirigé suivant l'axe des x.

Les équations déduites pour l'Univers miroir, sont un cas particulier des équations exprimées dans notre Univers pour $\Omega = 0$. Par suite, les équations de notre Univers ne peuvent s'obtenir que par intégration, alors que les solutions de l'Univers miroir s'obtiennent automatiquement en posant $\Omega = 0$. Intégrant l'équation dynamique le long de z, on parvient à

$$z = \dot{z}_{(0)}\,\tau + z_{(0)}\,. \tag{3.375}$$

Intégrant l'équation le long de y, on parvient de même à

$$\dot{y} = \left(2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}\right) x + C_1\,, \tag{3.376}$$

où la constante d'intégration est $C_1 = \dot{y}_{(0)} - \left(2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}\right) x_{(0)}$.

Substituant $\dot{y}$ dans la première équation (3.373), on obtient une équation différentielle du second ordre par rapport à x

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{eE}{m_0} + \omega^2 x_{(0)} - \omega\dot{y}_{(0)}\,, \tag{3.377}$$

où $\omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}$. Introduisant maintenant la nouvelle variable

$$u = x - \frac{A}{\omega^2}\,, \qquad A = \frac{eE}{m_0} + \omega^2 x_{(0)} - \omega \dot{y}_{(0)}\,, \tag{3.378}$$

on obtient l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0\,, \tag{3.379}$$

avec la solution

$$u = C_2 \cos\omega\tau + C_3 \sin\omega\tau\,, \tag{3.380}$$

où les constantes d'intégration sont $C_2 = u_{(0)}$, $C_3 = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega}$. Revenant à la variable x par substitution inverse des variables, on obtient

$$x = \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\cos\omega\tau + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{eE}{m_0\omega^2} + x_{(0)} - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,; \tag{3.381}$$

substituant celle-ci dans l'équation par $\dot{y}$ (3.376), et intégrant, il vient

$$y = \frac{1}{\omega}\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\sin\omega\tau - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{eE}{m_0\omega^2} + y_{(0)} + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\,. \tag{3.382}$$

Les équations vectorielles chr.inv. de l'Univers miroir ont les mêmes solutions mais avec la fréquence $\omega = \frac{eH}{m_0 c}$, car $\Omega = 0$. Dans notre Univers et l'Univers miroir, les énergies de particules correspondantes s'écrivent respectivement $E = mc^2$, et $E = -mc^2$.

Finalement, on obtient l'impulsion tridimensionnelle de la particule se déplaçant dans notre Univers

$$\left.\begin{aligned}
p^1 &= m_0\dot{x} = \left(\frac{eE}{\omega} - m_0\dot{y}_{(0)}\right)\sin\omega\tau + m_0\dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau \\
p^2 &= m_0\dot{y} = \left(\frac{2\Omega m_0}{\omega} + \frac{eH}{\omega c}\right)\left(\frac{eE}{m_0\omega} - \dot{y}_{(0)}\right) + m_0\dot{y}_{(0)} + \\
&\quad + \left(\frac{2\Omega m_0}{\omega} + \frac{eH}{\omega c}\right)\left[\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau\right] \\
p^3 &= m_0\dot{z} = m_0\dot{z}_{(0)}
\end{aligned}\right\}, \tag{3.383}$$

et celle de l'Univers miroir

$$\left.\begin{aligned}
p^1 &= \left(\frac{eE}{\omega} - m_0\dot{y}_{(0)}\right)\sin\omega\tau + m_0\dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau \\
p^2 &= \frac{eE}{\omega} + m_0\left[\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0\omega}\right)\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau\right] \\
p^3 &= m_0\dot{z}_{(0)}
\end{aligned}\right\}, \tag{3.384}$$

où contrairement à notre Univers, la fréquence se réduit à $\omega = \frac{eH}{m_0 c}$.

Nous voyons clairement que l'impulsion de la charge se déplaçant dans notre Univers sous la configuration des champs envisagée, effectue des oscillations harmoniques le long de x et y, tandis que le long de z, cette impulsion est une fonction linéaire du temps observable τ (vitesse initiale $\dot{z} \neq 0$). Dans le plan $x\,y$, la fréquence de l'oscillateur est $\omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}$.

Il convient néanmoins de noter qu'en présence des deux composantes électrique et magnétique, l'obtention des solutions exactes des équations dynamiques reste problématique, car le calcul exige la résolution d'intégrales elliptiques. Ici encore, on peut espérer que les logiciels spécifiques pourront bientôt faciliter la résolution complète, mais ce type d'étude sort du cadre de cet ouvrage. A ce sujet, on peut d'ailleurs penser que Landau et Lifshitz ont été confrontés au même problème* (cf. §22 *Théorie des Champs*), ce qui les a conduit à envisager une résolution dans le cadre de vitesses non relativistes et avec un champ électrique faible $\frac{eEx}{c^2} \approx 0$.

b) Le champ magnétique est parallèle au champ électrique et orthogonal au champ non holonome

Cherchons maintenant à résoudre les équations chr.inv. du mouvement de la particule chargée (3.370, 3.371) à la même approximation que dans le premier cas. Alors, pour notre Univers et l'Univers miroir, les équations sont respectivement

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eE}{m_0}\,, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = -\frac{eH}{m_0 c}\,\dot{z}\,, \quad \ddot{z} = \frac{eH}{m_0 c}\,\dot{y}\,, \tag{3.385}$$

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_0}\,, \qquad \ddot{y} = -\frac{eH}{m_0 c}\,\dot{z}\,, \qquad \ddot{z} = \frac{eH}{m_0 c}\,\dot{y}\,. \tag{3.386}$$

Intégrant la première équation (3.385), suivant l'axe des x, on obtient

$$\dot{x} = \frac{eE}{m_0}\,\tau - 2\Omega y + C_1\,, \qquad C_1 = conste = \dot{x}_{(0)} + 2\Omega y_{(0)}\,. \tag{3.387}$$

Intégrant de même la troisième équation suivant z, il vient

$$\dot{z} = \frac{eH}{m_0 c}\,y + C_2\,, \qquad C_2 = conste = \dot{z}_{(0)} - \frac{eH}{m_0 c}\,y_{(0)}\,. \tag{3.388}$$

Substituant la formule obtenue pour $\dot{x}$ et $\dot{z}$ dans la deuxième équation du mouvement (3.385), on obtient les équations différentielles linéai-

*Contrairement au propos de notre livre, les auteurs ont employé les méthodes généralement covariantes, et n'ont pas tenu compte d'un espace non holonome.

res du 2ème ordre

$$\ddot{y} + \left(4\Omega^2 + \frac{e^2H^2}{m_0^2c^2}\right) y = \frac{2\Omega eE}{m_0}\,\tau + 2\Omega C_1 - \frac{eH}{m_0 c}\,C_2\,. \tag{3.389}$$

Par changement de variable u, nous pouvons résoudre cette équation

$$u = y + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{eH}{m_0 c}\,C_2 - 2\Omega C_1\right), \qquad \omega^2 = 4\Omega^2 + \frac{e^2H^2}{m_0^2c^2}\,, \tag{3.390}$$

on obtient une équation des oscillations forcées

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{2\Omega eE}{m_0}\,\tau\,, \tag{3.391}$$

dont la solution est la somme d'une solution générale des oscillations libres

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0\,, \tag{3.392}$$

et d'une solution particulière de l'équation inhomogène

$$\tilde{u} = M\tau + N\,, \tag{3.393}$$

où $M = conste$ et $N = conste$.

Différentiant $\tilde{u}$ deux fois par rapport à τ, et substituant les résultats dans l'équation inhomogène (3.391), puis égalant les coefficients obtenus pour τ, on obtient les coefficients linéaires

$$M = \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2}\,, \qquad N = 0\,. \tag{3.394}$$

La solution générale de l'équation inhomogène initiale (3.391) devient

$$u = C_3\cos\omega\tau + C_4\sin\omega\tau + \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2}\,\tau\,, \tag{3.395}$$

où les constantes d'intégration peuvent s'obtenir en substituant les conditions initiales $\tau = 0$ dans les formules déduites. Il en résulte que $C_3 = u_{(0)}$ et $C_4 = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega}$.

Revenant à l'ancienne variable (3.390), on trouve la solution finale pour cette coordonnée

$$\begin{aligned} y = &\left[y_{(0)} + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{eH}{m_0 c}\,C_2 + 2\Omega C_1\right)\right]\cos\omega\tau + \\ &+ \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{eH}{m_0 c}\,C_2 + 2\Omega C_1\right) + \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2}\,\tau\,. \end{aligned} \tag{3.396}$$

Substituant alors cette formule dans les équations pour $\dot{x}$ et $\dot{z}$

$$\begin{aligned} x = \frac{eE}{2m_0}\left(1-\frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\tau^2 - \frac{2\Omega}{\omega}\left(y_{(0)}+A\right)\sin\omega\tau + \\ + \frac{2\Omega\,\dot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \left(C_1+2\Omega A\right)\tau + C_5\,, \end{aligned} \tag{3.397}$$

$$\begin{aligned} z = \frac{eH}{m_0 c\,\omega}\left[\left(y_{(0)}+A\right)\sin\omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau\right] - \\ - \left(\frac{eH}{m_0 c}A - C_2\right)\tau + C_6\,, \end{aligned} \tag{3.398}$$

où

$$A = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{eH}{m_0 c}C_2 - 2\Omega C_1\right), \tag{3.399}$$

$$C_5 = x_0 - \frac{2\Omega\,\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \qquad C_6 = z_{(0)} + \frac{eH\,\dot{y}_{(0)}}{m_0 c\,\omega^2}\,. \tag{3.400}$$

Si maintenant nous supposons $\Omega = 0$, alors à partir des coordonnées de la particule chargée associée à notre Univers (3.396–3.398), on obtient immédiatement les solutions pour celle de l'Univers miroir

$$x = \frac{eE}{2m_0}\tau^2 + \dot{x}_{(0)}\tau + x_{(0)}\,, \tag{3.401}$$

$$y = \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} + y_{(0)}\,, \tag{3.402}$$

$$z = \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} + z_{(0)}\,. \tag{3.403}$$

Par conséquent, on écrira les composantes de l'impulsion tridimensionnelle de la particule associée à notre Univers

$$\left.\begin{aligned} & p^1 = m_0\dot{x}_{(0)} + eE\left(1-\frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\tau - \\ & -2m_0\Omega\left[\frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau + \left(y_{(0)}+A\right)\cos\omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} - A\right] \\ & p^2 = m_0\left[\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau - \omega\left(y_{(0)}+A\right)\sin\omega\tau\right] + \frac{2\Omega eE}{\omega^2} \\ & p^3 = m_0\dot{z}_{(0)} + \\ & + \frac{eH}{c}\left[\left(y_{(0)}+A\right)\cos\omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau - A + \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2}\tau - y_{(0)}\right] \end{aligned}\right\}, \tag{3.404}$$

où la fréquence est $\omega = \sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2}{m_0^2 c}}$. Toujours dans cette même configuration des champs, les composantes de la 3-impulsion de la particule chargée associée à l'Univers miroir, sont

$$\left.\begin{aligned} p^1 &= m_0 \dot{x}_{(0)} + 2eE\tau \\ p^2 &= m_0 \left(\dot{y}_{(0)} \cos\omega\tau - \dot{z}_{(0)} \sin\omega\tau\right) \\ p^3 &= m_0 \left(\dot{z}_{(0)} \cos\omega\tau - \dot{y}_{(0)} \sin\omega\tau\right) \end{aligned}\right\}, \tag{3.405}$$

où, contrairement à notre Univers, la fréquence est $\omega = \frac{eH}{m_{(0)} c}$.

§ 3.14 Conclusions

En résumé, la théorie que nous avons élaboré au cours de ce chapitre peut être plus précisément appelée *Représentation chronométriquement invariante de l'électrodynamique dans un espace pseudo-riemannien.* Etant donné que l'appareil mathématique décrivant les quantités physiquement observables est initialement fondé sur la relativité générale, on peut l'appeler tout simplement : *l'électrodynamique chronométriquement invariante.* Résumons maintenant l'ensemble des résultats de base obtenus pour cette théorie :

— Les composantes chr.inv. du tenseur du champ électromagnétique (le tenseur de Maxwell) ;

— Les équations de Maxwell sous forme chr.inv. ;

— La loi de conservation de la charge électrique sous forme chr.inv. ;

— La condition de Lorentz sous forme chr.inv. ;

— Les équations de d'Alembert sous forme chr.inv. (équations de propagation des ondes), pour le potentiel scalaire et le potentiel vecteur du champ électromagnétique ;

— La force de Lorentz sous forme chr.inv. ;

— Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique et ses composantes chr.inv. ;

— Les équations chr.inv. du mouvement d'une particule d'épreuve chargée ;

— La structure géométrique du potentiel quadridimensionnel d'un champ électromagnétique.

Il est manifeste que l'électrodynamique chr.inv. se présente comme une théorie qui englobe un champ d'applications beaucoup plus vaste. Ajoutons que nous aurions pu aussi déduire les équations dynamiques

chr.inv. d'une charge spatialement étendue, ou encore envisager le mouvement d'une particule susceptible d'émission électromagnétique interagissant avec le champ. De même, il était loisible d'envisager les équations du mouvement d'une particule se déplaçant suivant un angle arbitraire par rapport au champ magnétique (particule individuelle ou distribution de charges), au même titre que toute autre situation plus complexe.

Chapitre 4 Mouvement des particules douées de rotation intrinsèque

§ 4.1 Position du problème

Au cours de ce chapitre, nous nous proposons d'écrire les équations du mouvement d'une particule caractérisée par un moment intrinsèque de rotation (nous parlerons aussi bien de "spin" de la particule, bien que cette terminologie possède en physique quantique une signification bien particulière). Ainsi que nous l'avons indiqué au chapitre 1, ces équations sont déduites du transport parallèle du 4-vecteur dynamique Q^α de la particule, qui est la somme des vecteurs

$$Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha, \tag{4.1}$$

où $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ est le vecteur impulsion quadridimensionnel de cette particule. Le 4-vecteur S^α représente une impulsion supplémentaire communiquée à la particule sous l'influence de son moment intrinsèque, et qui rend donc son mouvement non géodésique. Le vecteur S^α sera appelé ici *impulsion de spin*. Comme nous connaissons déjà les composantes du vecteur impulsion P^α, la connaissance des composantes du vecteur S^α suffira à définir le vecteur dynamique global Q^α.

Par suite, notre première étape consistera à définir le spin de la particule comme une grandeur géométrique dans l'espace pseudo-riemannien de la relativité générale. Au §4.2, nous déduirons donc le vecteur impulsion de spin S^α proprement dit. Au §4.3, nous trouverons les équations du mouvement d'une particule à spin dans l'espace pseudo-riemannien, et leur projections chr.inv. Les autres paragraphes de ce chapitre seront consacrés au mouvement des particules élémentaires.

La valeur numérique du spin est $\pm n\hbar$, mesurée en fractions de la constante de Planck, où n est le *nombre quantique de spin*. A ce jour, aux différents types de particules élémentaires répertoriées, ont attribue les nombres $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Un signe alterné devant chaque nombre traduit le sens de rotation, droit (dextrogyre) ou gauche, (lévogyre), de la particule envisagée. Par ailleurs, la constante de Planck $\hbar$, a les dimensions d'un moment de rotation $[\,\mathrm{g\ cm^2/s}\,]$. A elle seule, cette dimension indique que la structure géométrique d'un tenseur de spin doit

être identique à celle du tenseur du moment cinétique [g cm^2/s], c'est-à-dire à celle d'un tenseur antisymétrique de second rang. Nous allons vérifier cette circonstance par un moyen différent.

Le second postulat de Bohr stipule que la longueur de l'orbite d'un électron comprend un nombre entier de longueurs d'ondes de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$, associées à ces électrons, en accord avec le dualisme onde-particule. Autrement dit, si la longueur de l'orbite de l'électron est $2\pi r$, elle comprendra k longueurs d'onde brogliennes

$$2\pi r = k\lambda = k\,\frac{h}{p}\,, \tag{4.2}$$

où p est l'impulsion orbitale de l'électron. Compte tenu de la constante de Planck $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, cette dernière équation s'écrit

$$rp = k\hbar\,. \tag{4.3}$$

Le rayon vecteur de l'orbite électronique étant normal au vecteur impulsion orbital p^k, la formule (4.3) s'écrit en notations tensorielles sous la forme d'un produit vectoriel

$$\left[\, r^i ; p^k \right] = k\hbar^{ik}\,. \tag{4.4}$$

La constante de Planck ainsi déduite du second postulat de Bohr, se présente alors comme un tenseur antisymétrique de second rang.

Une telle transcription de la constante de Planck est liée à la représentation du modèle orbital d'un atome simple, mais généralement les systèmes qui décrivent les particules élémentaires ou électrons, sont beaucoup plus complexes. Il reste que le spin qui est défini à partir de cette constante, est une propriété intrinsèque des particules élémentaires, et suivant le second postulat de Bohr, nous sommes donc conduits à envisager la structure géométrique de la constante de Planck, exclusivement à partir des propriétés internes de l'électron.

A ce titre, l'expérience de Stern et Gerlach nous offre une opportunité intéressante. Un des principaux résultats de cette expérience, confirme l'existence d'un moment magnétique propre L_{m} de l'électron, proportionnel à son moment de rotation intrinsèque (spin)

$$\frac{m_{\mathrm{e}}}{e}\,L_{\mathrm{m}} = n\hbar\,, \tag{4.5}$$

où e est la charge de l'électron, m_{e} sa masse et n est le nombre quantique de spin (pour l'électron $n = \frac{1}{2}$). Le moment magnétique résultant de la circulation d'une charge e le long d'un contour fermé d'aire $S = \pi r^2$, et

qui produit un courant I, est $L_{\mathrm{m}} = IS$. Ce courant est égal à la charge e divisée par sa période de circulation $T = \frac{2\pi r}{u}$

$$I = \frac{eu}{2\pi r}\,, \tag{4.6}$$

où u est la vitesse (linéaire) tangentielle de cette charge. Par suite, le moment magnétique propre de l'électron est

$$L_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\, eur\,, \tag{4.7}$$

ou en notations tensorielles*

$$L_{\mathrm{m}}^{ik} = \frac{1}{2}\, e\left[\, r^i; u^k \,\right] = \frac{1}{2}\left[\, r^i; p_{\mathrm{m}}^k \,\right]\,, \tag{4.8}$$

où r^i est le rayon vecteur de l'orbite décrite par le courant électronique, et u^k est le vecteur vitesse de la circulation de l'électron.

On voit alors clairement que la constante de Planck calculée au moyen du moment magnétique interne d'un électron (4.5), est aussi le produit vectoriel de 2 vecteurs. Cette constante peut être alors représentée sous la forme d'un tenseur antisymétrique de 2ème rang

$$\frac{m_{\mathrm{e}}}{2e}\left[\, r^i; p_{\mathrm{m}}^k \,\right] = n\hbar^{ik}, \tag{4.9}$$

qui reste en parfait accord avec le second postulat de Bohr.

Dans l'espace pseudo-riemannien, les composante spatiales de ce tenseur appartiennent au le *tenseur antisymétrique quadridimensionnel de Plank* $\hbar^{\alpha\beta}$

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \hbar^{00} & \hbar^{01} & \hbar^{02} & \hbar^{03} \\ \hbar^{10} & \hbar^{11} & \hbar^{12} & \hbar^{13} \\ \hbar^{20} & \hbar^{21} & \hbar^{22} & \hbar^{23} \\ \hbar^{30} & \hbar^{31} & \hbar^{32} & \hbar^{33} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

A ce tenseur $\hbar^{\alpha\beta}$, correspond le *pseudo-tenseur de Planck* $\hbar^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu}\hbar_{\mu\nu}$. Par conséquent, le spin d'une particule dans un espace pseudo-riemannien est caractérisé par le tenseur antisymétrique $n\hbar^{\alpha\beta}$, ou par son pseudo-tenseur $n\hbar^{*\alpha\beta}$. Il est à noter que la nature physique du spin n'importe pas, car il suffit que cette propriété fondamentale soit inhérente à un tenseur ou à un pseudo-tenseur particulier, comme

*Les équations (4.8) et (4.9) sont exprimées dans l'espace de Minkowski, qui reste un cadre expérimental acceptable. Dans un espace de Riemann, l'intégrale dépend du chemin d'intégration, et le rayon vecteur de dimension finie ne peut plus être défini, car sa longueur dépend des directions qui varient elles-mêmes en permanence.

nous venons de le montrer. Grâce à cette approche, on peut résoudre le problème du mouvement des particules à spin, sans faire d'hypothèse préalable sur leur structure interne, c'est-à-dire en ayant exclusivement recours à une méthode strictement mathématique.

Géométriquement parlant, la constante de Planck se présente donc comme un tenseur antisymétrique de 2ème rang dont la dimension est homogène à un moment cinétique, indépendamment de la nature des grandeurs à partir desquelles il est déduit : mécanique ou électromagnétique. Il en résulte que le tenseur de Planck n'est pas lié à la rotation des masses à l'intérieur des atomes, ou à celles contenues dans les particules élémentaires. Ce tenseur est au contraire déterminé par une rotation quantique particulière de l'espace même, et fixe ainsi toutes les rotations "élémentaires" de cet espace, indépendamment de leur nature.

La rotation d'espace est caractérisée par un tenseur chr.inv. A_{ik} (1.36), obtenu en abaissant les indices $A_{ik} = h_{im} h_{kn} A^{mn}$ des composantes A^{mn} du 4-tenseur contravariant

$$A^{\alpha\beta} = c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} a_{\mu\nu}\,, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}\right). \tag{4.11}$$

Dans le référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$), les grandeurs auxiliaires $a_{\mu\nu}$ ont les composantes

$$a_{00} = 0\,, \quad a_{0i} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t}\right), \quad a_{ik} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right). \tag{4.12}$$

Donc, nous aurons

$$\begin{aligned} &A_{00} = 0\,, \qquad A_{0i} = -A_{i0} = 0\,, \\ &A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k - F_k v_i\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

En l'absence de champs gravitationnels, le tenseur des vitesses angulaires de la rotation d'espace ne dépend que de la vitesse tangentielle de cette rotation v_i, et donc, nous le notons $A_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}$

$$\Omega_{00} = 0\,, \quad \Omega_{0i} = -\,\Omega_{i0} = 0\,, \quad \Omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right). \tag{4.14}$$

Par ailleurs, le dualisme onde-particule implique qu'à chaque particule soit associée une onde d'énergie $E = mc^2 = \hbar\omega$, où m est la masse relativiste de la particule, et ω sa fréquence propre. En d'autres termes, du point de vue géométrique, une particule peut être représentée par une

onde étalée et infiniment proche de la position de cette particule, et dont la fréquence propre va dépendre d'une certaine distribution des vitesses angulaires $\omega_{\alpha\beta}$, définies dans ce voisinage. De ce fait, la relation quantique écrite plus haut devient une relation tensorielle $mc^2 = \hbar^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}$.

Le tenseur de Planck étant antisymétrique, toutes ses composantes diagonales sont nulles. Ses composantes mixtes d'espace-temps dans le référentiel d'accompagnement, sont également nulles suivant le même schéma que les composantes respectives du 4-tenseur de rotation d'espace (4.14). Les valeurs numériques observables des trois composantes spatiales du tenseur de Planck sont $\pm\hbar$, dépendant du sens de rotation, et forment ainsi le *tenseur de Planck tridimensionnel chr.inv.* $\hbar^{ik}$. Pour des rotations de type lévogyre, les composantes $\hbar^{12}$, $\hbar^{23}$, $\hbar^{31}$ sont positives, tandis que les composantes $\hbar^{13}$, $\hbar^{32}$, $\hbar^{21}$ sont négatives.

Le 4-tenseur de Planck est représentable par la matrice

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar & -\hbar \\ 0 & -\hbar & 0 & \hbar \\ 0 & \hbar & -\hbar & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Pour des rotations de type dextrogyre, les composantes $\hbar^{12}$, $\hbar^{23}$, $\hbar^{31}$ changent de signe et deviennent négatives, alors que les composantes $\hbar^{13}$, $\hbar^{32}$, $\hbar^{21}$ deviennent positives

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar & \hbar \\ 0 & \hbar & 0 & -\hbar \\ 0 & -\hbar & \hbar & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Le carré du 4-tenseur de Planck peut être calculé selon

$$\begin{aligned} \hbar_{\alpha\beta}\,\hbar^{\alpha\beta} = 2\hbar^2\big[&\big(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\big)+\big(g_{11}g_{33}-g_{13}^2\big)+\big(g_{22}g_{33}-g_{23}^2\big)+ \\ &+2\,(g_{12}g_{23}-g_{22}g_{13}-g_{12}g_{33}+g_{13}g_{23}-g_{11}g_{23}+g_{12}g_{13})\big]\,, \end{aligned} \tag{4.17}$$

et dans un référentiel galiléen rapporté à l'espace de Minkowski, où la métrique est diagonale (2.70), le carré est égal à $\hbar_{\alpha\beta}\hbar^{\alpha\beta} = 6\hbar^2$. Dans un espace riemannien, la grandeur $\hbar_{\alpha\beta}\hbar^{\alpha\beta}$ peut se déduire en substituant le tenseur métrique fondamental chr.inv. $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2}v_i v_k$ dans (4.17). Par conséquent, même si les composantes physiquement observables $\hbar^{ik}$ du tenseur de Planck sont constantes (signes de rotation opposés), son carré dépend en général de la vitesse angulaire de rotation d'espace.

Ayant ainsi défini le tenseur de Planck, nous sommes maintenant en mesure d'aborder le calcul de l'impulsion supplémentaire dû au spin,

ainsi que celui des équations du mouvement de la particule à spin se déplaçant dans l'espace pseudo-riemannien. Cette étude fera l'objet du prochain paragraphe §4.2.

§ 4.2 Impulsion d'une particule en rotation dans les équations du mouvement

L'impulsion supplémentaire S^α communiquée à la particule sous l'influence de son spin, peut s'obtenir à partir de l'action appliquée à cette particule à spin.

Considérons tout d'abord une particule caractérisée par un champ scalaire interne k, et qui interagit avec un champ scalaire extérieur A. L'action S traduit son déplacement sur un intervalle élémentaire ds, selon

$$S = \alpha_{(kA)} \int_a^b kA\, ds\,, \tag{4.18}$$

où a $\alpha_{(kA)}$ est une constante scalaire inhérente aux propriétés de la particule, lors de l'interaction considérée, et dont les dimensions sont données dans [10, 20]. Si le champ scalaire interagit avec un champ extérieur représenté par un tenseur du 1er rang A_α, l'action correspondante sera donnée par

$$S = \alpha_{(kA_\alpha)} \int_a^b kA_\alpha\, dx^\alpha. \tag{4.19}$$

Pour un champ extérieur représenté par un tenseur du 2ème rang, $A_{\alpha\beta}$, on aura de même

$$S = \alpha_{(kA_{\alpha\beta})} \int_a^b kA_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta, \tag{4.20}$$

et ainsi de suite. A titre d'exemple, si le potentiel vecteur spécifique de la particule est k^α, et le champ vectoriel extérieur A_α, l'action sera donnée par

$$S = \alpha_{(k^\alpha A_\alpha)} \int_a^b k^\alpha A_\alpha\, ds\,. \tag{4.21}$$

Indépendamment de la nature des particules et des champs considérés, l'action peut s'écrire sous forme générale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt\,, \tag{4.22}$$

où L est appelée la *fonction de Lagrange*. Etant donné que les dimensions de l'action S sont $[\,\mathrm{erg\ s} = \mathrm{g\ cm^2/s}\,]$, la fonction de Lagrange a

les dimensions d'une énergie [erg = g cm^2/s^2]. Sa dérivée par rapport à la 3-vitesse $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ de la particule

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = p_i \tag{4.23}$$

représente en notations covariantes, son impulsion tridimensionnelle $p^i = cP^i$, qui est usuellement exploitée pour rétablir le 4-vecteur impulsion de la particule P^α.

Après avoir acquis ces notions préliminaires, nous sommes à présent en mesure de calculer précisément le supplément d'impulsion communiqué à la particule, résultant de son spin.

Nous savons déjà que l'action pour une particule libre dans l'espace pseudo-riemannien, s'écrit*

$$S = \int_a^b m_0 c\, ds\,. \tag{4.24}$$

Dans l'espace de Minkowski rapporté à un système galiléen, l'élément d'espace-temps est

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta} = cdt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,, \tag{4.25}$$

et l'action (4.24) devient

$$S = \int_a^b m_0 c\, ds = \int_{t_1}^{t_2} m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\; dt\,. \tag{4.26}$$

Par suite, on en déduit la fonction de Lagrange pour la particule libre dans le référentiel galiléen de cet espace

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{4.27}$$

Différentiant maintenant par rapport à la vitesse des coordonnées, on obtient la forme covariante de l'impulsion tridimensionnelle

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = m_0 c^2\, \frac{\partial \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\partial u^i} = -\frac{m_0\, u_i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,. \tag{4.28}$$

---

*Dans la *Théorie des Champs* [10], Landau et Lifshitz écrivent le signe "moins" devant l'action, contrairement à notre texte où nous conservons le signe "plus" devant l'action et la fonction de Lagrange. Cette différence provient du choix de la signature de l'espace pseudo-riemannien considéré. La signature adoptée par Landau et Lifshitz est $(-+++)$, avec donc un temps imaginaire, et des coordonnées spatiales réelles, ainsi qu'une impulsion positive (voir plus bas). Notre choix $(+---)$ est celui de Zelmanov [9,11–13], car dans ce cas, le temps est réel avec les 3 coordonnées spatiales imaginaires, et donc la 3-impulsion observable est positive.

Puis, en élevant les indices, on trouve l'expression du vecteur impulsion quadridimensionnel

$$P^\alpha = \frac{m_0}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{dx^\alpha}{dt} = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}\,. \tag{4.29}$$

On remarque que dans la troisième formule, m_0 et $\frac{dx^\alpha}{ds}$ sont des quantités covariantes qui sont conservées dans n'importe quel système de référence. Cette circonstance se vérifie donc pour n'importe quel espace pseudo-riemannien.

Considérons à présent le mouvement d'une particule douée d'une certaine propriété interne, qui se manifeste sous la forme de son *spin*. Dans l'espace pseudo-riemannien, cette rotation intrinsèque de la particule $n\hbar^{\alpha\beta}$ correspond à l'influence du champ extérieur engendré par la rotation de cet espace $A_{\alpha\beta}$. Par suite, l'action globale de la particule à spin s'écrit

$$S = \int_a^b \left(m_0 c\, ds + \alpha_{(\mathrm{s})}\hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\, ds\right), \tag{4.30}$$

où a $\alpha_{(\mathrm{s})}$ [s/cm] est une constante scalaire qui caractérise l'interaction de la particule avec son spin. Etant donné que les constantes associées à l'action se rapportent aux propriétés fondamentales des particules considérées, il est évident que α représente ici le nombre quantique de spin n, fonction des propriétés internes de la particule, divisé par la vitesse de la lumière : $\alpha = n/c$. Par conséquent, l'action correspondant à l'interaction du spin de la particule avec le champ non holonome de l'espace $A_{\alpha\beta}$, s'écrira

$$S = \alpha_{(\mathrm{s})}\int_a^b \hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\, ds = \frac{n}{c}\int_a^b \hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\, ds\,. \tag{4.31}$$

Il convient de noter ici que la méthode qui conduit à définir la 4-impulsion d'une particule libre, n'est pas applicable à la définition du 4-vecteur impulsion d'une particule à spin. Dans l'espace de Minkowski, nous avions déduit l'impulsion de la particule de l'action S dans un repère galiléen, en utilisant l'expression ds tirée de (4.25). Il a été montré que la formule covariante déduite de (4.29) reste valable dans tout référentiel de l'espace pseudo-riemannien, mais l'on voit clairement que dans l'action de la particule à spin, la perturbation de son mouvement n'est effective que dans le cadre d'un espace non holonome $A_{\alpha\beta} \neq 0$. C'est dire encore, que les éléments non diagonaux du tenseur métrique fondamental g_{0i} sont non nuls.

Par définition, dans un référentiel galiléen, tous les termes non diagonaux sont nuls, et avec eux, les composantes de la vitesse linéaire de rotation d'espace $v_i = -c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$, ainsi que les composantes du tenseur $A_{\alpha\beta}$. Il est donc inutile de vouloir déduire la formule de la particule à spin dans l'espace de Minkowski rapporté à un référentiel galiléen (où elle est manifestement nulle), et donc, seul l'espace pseudo-riemannien peut se prêter à ce calcul. Dans un référentiel d'accompagnement arbitraire, l'intervalle d'espace-temps s'écrira

$$ds = cd\tau\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} = cdt\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2}}\,, \tag{4.32}$$

où la vitesse des coordonnées de la particule $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ peut s'exprimer en fonction de la vitesse observable $\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$, selon

$$\mathrm{v}^i = \frac{u^i}{1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}}\,, \qquad \mathrm{v}^2 = \frac{h_{ik}\,u^i u^k}{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2}\,. \tag{4.33}$$

Alors, l'action supplémentaire (4.31) produite par l'interaction du spin et du champ non holonome d'espace, s'écrit

$$S = n\int_{t_1}^{t_2} \hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}}\,dt\,. \tag{4.34}$$

La fonction de Lagrange pour cette action sera finalement

$$L = n\hbar^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{4.35}$$

Pour déterminer le supplément d'impulsion dû au spin, il suffit de différentier la fonction (4.35) par rapport à la vitesse des coordonnées de la particule. Prenant en compte le fait que le tenseur des rotations intrinsèques $\hbar^{\alpha\beta}$ de la particule, et le tenseur des rotations d'espace $A_{\alpha\beta}$ (4.13), ne sont pas fonctions des vitesses de la particule, on obtient après différentiation

$$\begin{aligned} p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} &= n\hbar^{mn}A_{mn}\frac{\partial}{\partial u^i}\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{w}+v_i u^i}{c^2}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}} = \\ &= -\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left(v_i+\mathrm{v}_i\right), \end{aligned} \tag{4.36}$$

où $\mathrm{v}_i = h_{ik}\mathrm{v}^k$. Comparons (4.36) avec les composantes spatiales covariantes $p_i = cP_i$ du 4-vecteur $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ de la particule dans l'espace pseudo-riemannien*. Si la particule est située dans notre Univers, elle se déplace du passé vers le futur, par rapport à nous, et sa 3-impulsion covariante est

$$p_i = cP_i = cg_{i\alpha}P^\alpha = -\,m\,(v_i + \mathrm{v}_i) = -\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,(v_i + \mathrm{v}_i)\,. \qquad (4.37)$$

Nous voyons ici que la 4-impulsion S^α supplémentaire que le spin communique à la particule (impulsion du spin), est

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2}\,n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,, \qquad (4.38)$$

ou encore, en introduisant $\eta_0 = n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = n\hbar^{mn}A_{mn}$, afin de simplifier la formule, on obtient

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2}\,\eta_0\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,. \qquad (4.39)$$

Le vecteur global Q^α (4.1) qui caractérise le mouvement de la particule à spin, s'écrit ainsi

$$Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha = m_0\,\frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{1}{c^2}\,n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,. \qquad (4.40)$$

En résumé, dans un espace non holonome ($A_{\mu\nu} \neq 0$), toute particule à spin reçoit une impulsion supplémentaire, qui la fait dévier de sa ligne géodésique et rend son mouvement non géodésique. En l'absence de rotation d'espace, c'est-à-dire quand l'espace est holonome, $A_{\mu\nu} = 0$, et le spin de la particule ne perturbe pas le mouvement. Il est cependant rare, de trouver un endroit de l'espace dépourvu de rotation, et plus particulièrement dans le domaine de la physique atomique, où l'influence du spin est prépondérante, car le régime des rotations y est très intense.

§ 4.3 Les équations du mouvement d'une particule en rotation intrinsèque

Nous écrivons ici les équations du mouvement d'une particule, déduites par transport parallèle du vecteur global $Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha$ (4.40), le long de la trajectoire de la particule (son transport parallèle dans l'espace riemannien)

$$\frac{d}{ds}\,(P^\alpha + S^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,(P^\mu + S^\mu)\,\frac{dx^\nu}{ds} = 0\,, \qquad (4.41)$$

*Dans ce type de comparaison, nous avons considéré une particule massive.

où le carré du vecteur demeure inchangé $Q_\alpha Q^\alpha = conste$, pendant son transport.

Notre but consiste ici à déduire les projections chr.inv. de ces équations. En notations générales, les projections ont été obtenues au chapitre 2

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{c}\, F_i q^i \frac{d\tau}{ds} + \frac{1}{c}\, D_{ik}\, q^i \frac{dx^k}{ds} = 0\,, \tag{4.42}$$

$$\frac{dq^i}{ds} + \left(\frac{\varphi}{c}\frac{dx^k}{ds} + q^k \frac{d\tau}{ds}\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \frac{\varphi}{c} F^i \frac{d\tau}{ds} + \Delta^i_{mk} q^m \frac{dx^k}{ds} = 0\,, \tag{4.43}$$

où φ est la projection du vecteur global Q_α sur la ligne de temps de l'observateur, et q^i est sa projection sur la section spatiale

$$\varphi = b_\alpha Q^\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} + \frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{4.44}$$

$$q^i = h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i = P^i + S^i. \tag{4.45}$$

Nous devons donc déduire φ et q^i en les substituant dans (4.42, 4.43), et en annulant les termes semblables, on obtient les projections chr.inv. du vecteur impulsion $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i. \tag{4.46}$$

Il nous faut ensuite déduire les projections chr.inv. du vecteur impulsion du spin S^α. Dans la formule pour S^α (4.39), l'intervalle d'espace-temps formulé à l'aide des quantités observables étant $ds = cd\tau \times \times \sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$, on obtient pour les composantes de S^α

$$S^0 = \frac{1}{c^2} \frac{n\hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \frac{\left(v_i \mathrm{v}^i \pm c^2\right)}{c^2\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\,, \tag{4.47}$$

$$S^i = \frac{1}{c^3} \frac{n\hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\, \mathrm{v}^i, \tag{4.48}$$

$$S_0 = \pm \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) \frac{n\hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{4.49}$$

$$S_i = -\frac{1}{c^3} \frac{n\hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\, (v_i \pm \mathrm{v}_i)\,, \tag{4.50}$$

qui sont également formulées au moyen de quantités physiquement observables. Les projections chr.inv. du vecteur impulsion de la particule à spin s'écrivent

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm \frac{1}{c^2}\,\eta\,, \qquad S^i = \frac{1}{c^3}\,\eta\,\mathrm{v}^i, \tag{4.51}$$

où la quantité η est donnée par

$$\eta = \frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{4.52}$$

Les signes alternés qui résultent de la substitution de la fonction temporelle $\frac{dt}{d\tau}$ (1.55), indiquent le sens du déplacement de la particule, vers le futur (signe supérieur), ou dans le passé (signe inférieur). Par suite, le carré du vecteur impulsion du spin est

$$S_\alpha S^\alpha = g_{\alpha\beta}\,S^\alpha S^\beta = \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2\,g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha dx^\beta}{ds^2} = \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2\,, \tag{4.53}$$

et le carré du vecteur global Q^α est

$$Q_\alpha Q^\alpha = g_{\alpha\beta}\,Q^\alpha Q^\beta = m_0^2 + \frac{2}{c^2}\,m_0\eta_0 + \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2\,. \tag{4.54}$$

En définitive, le carré du vecteur global d'une particule à spin se décompose en 3 parties, à savoir :

a) Le carré du vecteur impulsion de la particule $P_\alpha P^\alpha = m_0^2$;
b) Le carré de son vecteur impulsion de spin $S_\alpha S^\alpha = \frac{1}{c^4}\,\eta_0^2$;
c) Le terme $\frac{2}{c^2}\,m_0\eta_0$, qui décrit l'interaction spin-gravitation de la particule.

Pour effectuer le transport parallèle (4.41), il est indispensable que le carré du vecteur transporté demeure inchangé le long de l'intégralité du chemin. La formule obtenue (4.54), $m_0 = conste$, implique cependant que le carré du vecteur global Q^α demeure inchangé seulement si $\eta_0 = conste$, c'est-à-dire

$$d\eta_0 = \frac{\partial\eta_0}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha = 0\,. \tag{4.55}$$

Divisant alors les deux membres de l'équation par $d\tau$, ce qui est toujours possible, puisque l'intervalle élémentaire du temps physique de l'observateur est plus grand que zéro, on trouve la condition de conservation du carré du vecteur global attaché à la particule à spin

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \frac{{}^*\partial\eta_0}{\partial t} + \mathrm{v}^k\,\frac{{}^*\partial\eta_0}{\partial x^k} = 0\,. \tag{4.56}$$

Substituant $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$, on obtient

$$n\hbar^{mn}\left(\frac{{}^*\partial A_{mn}}{\partial t} + \mathrm{v}^k\,\frac{{}^*\partial A_{mn}}{\partial x^k}\right) = 0\,. \tag{4.57}$$

Pour illustrer ces résultats, nous formulerons le tenseur de non holonomicité d'espace A_{ik}, qui est en fait le tenseur des vitesses angulaires de rotation d'espace, au moyen du pseudo-vecteur des vitesses angulaires de cette rotation

$$\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}A_{mn}\,, \tag{4.58}$$

et qui est aussi une quantité chr.inv.

Multipliant Ω^{*i} par ε_{ipq}

$$\Omega^{*i}\,\varepsilon_{ipq} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}\varepsilon_{ipq}A_{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta^m_p\delta^n_q - \delta^n_p\delta^m_q\right)A_{mn} = A_{pq}\,, \tag{4.59}$$

on obtient (4.57) sous la forme

$$\begin{aligned} &n\hbar^{mn}\left[\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(\varepsilon_{imn}\Omega^{*i}\big) + \mathrm{v}^k\,\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\big(\varepsilon_{imn}\Omega^{*i}\big)\right] = \\ &= n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\left[\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\big) + \mathrm{v}^k\,\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\big(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\big)\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Le vecteur de la force d'inertie gravitationnelle et le tenseur de non holonomicité, sont reliés par les identités de Zelmanov, dont l'une est (voir formule 13.20 dans [9])

$$\frac{2}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\big) + \varepsilon^{ijk}\,{}^*\nabla_j\,F_k = 0\,, \tag{4.61}$$

ou en notations différentes

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\big({}^*\nabla_k\,F_i - {}^*\nabla_i\,F_k\big) = \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right) = 0\,, \tag{4.62}$$

où $\varepsilon^{ijk}\,{}^*\nabla_j\,F_k$ est le rotationnel chr.inv. du champ de la force d'inertie gravitationnelle F_k. Il est alors évident que la non stationnarité de la rotation d'espace A_{ik}, est due au caractère rotationnel du champ de force d'inertie gravitationnelle F_i. Compte tenu de l'équation (4.61), notre formule (4.60) devient

$$-\,n\hbar^{mn}\,{}^*\nabla_m\,F_n + n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\,\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\big(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\big) = 0\,, \tag{4.63}$$

ou en notations différentes

$$n\hbar^{mn}\,{}^*\nabla_m F_n = n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\left(\Omega^{*i}\frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial\Omega^{*i}}{\partial x^k}\right). \tag{4.64}$$

Rappelons ici que cette formule n'est rien d'autre que la notation développée chr.inv., de la condition de conservation pour le vecteur global (4.57). Le membre de gauche de (4.64) est alors

$$\pm 2n\hbar\left({}^*\nabla_1 F_2 - {}^*\nabla_2 F_1 + {}^*\nabla_1 F_3 - {}^*\nabla_3 F_1 + {}^*\nabla_2 F_3 - {}^*\nabla_3 F_2\right), \tag{4.65}$$

où le "plus" et le "moins" traduisent la rotation "droite" ou la rotation "gauche" des référentiels respectifs. Par conséquent, le membre de gauche de l'équation (4.64) dépend de l'orientation spatiale du pseudo-vecteur Ω^{*i} de la rotation d'espace.

Pour que le carré du vecteur associé à la particule à spin puisse se conserver dans le transport parallèle, il faut que les membres de droite et de gauche (4.64) soient égaux, tout au long de la trajectoire. Dans le cas général où aucune hypothèse supplémentaire n'est faite sur la structure géométrique de l'espace, cette condition sera vérifiée pour un équilibre entre le champ vertical de la force d'inertie gravitationnelle, et la distribution spatiale du pseudo-vecteur des rotations d'espace. Si le champ des forces d'inertie gravitationnelle est irrotationnel (absence de tourbillon), le membre de gauche de la condition de conservation (4.64), est nul, et cette même condition devient

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) = 0\,. \tag{4.66}$$

Introduisant alors la dérivée chr.inv. $\frac{{}^*\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2}v_k\frac{{}^*\partial}{\partial t}$, nous aurons

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\frac{1}{\sqrt{h}}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) - \frac{1}{c^2}\,v_k\,\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right)\right] = 0\,. \tag{4.67}$$

Comme le champ de forces F_i est irrotationnel, et compte tenu de (4.66), le deuxième terme dans cette formule est nul. Par suite, le carré du vecteur global associé à la particule à spin, demeure inchangé dans le champ de forces irrotationnel F_i, à condition que la formule chr.inv. (4.66) et la formule des dérivées usuelles, soient nulles

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right) = 0\,. \tag{4.68}$$

C'est le cas pour les particules massives, où par exemple, $\mathrm{v}^k = 0$, c'est-à-dire lorsqu'elles sont au repos par rapport à un observateur, et

son système physique de référence. L'annulation des dérivées dans (4.68) n'est donc pas essentielle dans ce dernier cas. Par contre, pour les particules dépourvues de masse, et qui voyagent à la vitesse de la lumière dans le champ de forces irrotationnel F_i, les dérivées $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{h}\,\Omega^{*i})$ doivent être nulles.

Trouvons maintenant les équations chr.inv. du mouvement d'une particule à spin dans l'espace pseudo-riemannien. Substituant (4.46) et (4.51) dans (4.44) et (4.45), on parvient aux projections chr.inv. du vecteur global de la particule à spin

$$\varphi = \pm\Big(m + \frac{1}{c^2}\,\eta\Big), \qquad q^i = \frac{1}{c}\,m\,\mathrm{v}^i + \frac{1}{c^3}\,\eta\mathrm{v}^i. \tag{4.69}$$

Après avoir substitué ces quantités pour $\varphi > 0$, dans (4.42, 4.43), on obtient les équations chr.inv. du mouvement d'une particule à spin massive, située dans notre Univers (la particule voyage du passé vers l'avenir)

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right) - \frac{2\eta}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k,\end{aligned} \tag{4.71}$$

tandis que pour la particule de l'Univers miroir (qui se déplace dans le passé), en substituant les quantités (4.69) pour $\varphi < 0$, il vient

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &\qquad = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right) - \frac{\eta}{c^2}\,F^i - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Nous écrirons maintenant les équations déduites, en faisant apparaître la *partie géodésique* dans les membres de gauche qui décrit le mouvement libre de la particule, et en laissant dans les membres de droite les termes liés au spin de la particule, qui rendent son mouvement non géodésique (*partie non géodésique*). De la sorte, pour une particule sans spin, les membres de droite sont nuls, et on obtient les équations chr.inv. du mouvement inertiel, forme qui facilite leur analyse.

Dans le cadre du dualisme onde-corpuscule, une particule dépourvue de masse est décrite par le 4-vecteur d'onde $K^\alpha = \frac{\omega}{c}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}$, expression dans laquelle $d\sigma^2 = h_{ik}\,dx^i dx^k$, représente le carré de l'intervalle spatial physiquement observable, qui n'est pas nul le long des trajectoires isotropes. Puisque les particules sans masse voyagent en suivant des trajectoires isotropes (trajectoires du genre lumière), le vecteur K^α est également isotrope : son carré est nul. Mais comme la dimension du vecteur K^α est $[\,\mathrm{cm}^{-1}]$, ces équations ont des dimensions distinctes de celles des équations du mouvement des particules massives. Cette différence interdit par ailleurs d'établir une formule unique pour l'action des particules avec, et sans masse [9].

Par contre, le spin est un attribut physique qui caractérise les deux types de particules, et donc, la déduction des équations du mouvement pour des particules à spin, requiert obligatoirement un vecteur unique pour ces deux particules.

Un tel vecteur peut être alors obtenu en appliquant les conditions physiques vérifiées le long des trajectoires isotropes

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0\,, \qquad c\,d\tau = d\sigma \neq 0\,, \tag{4.74}$$

au 4-vecteur impulsion de la particule massive

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{m}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = m\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,. \tag{4.75}$$

Il en découle que l'intervalle spatial observable qui ne s'annule pas le long des trajectoires isotropes devient le paramètre de dérivation, tandis que la dimension de (4.75), à l'inverse de celle du 4-vecteur d'onde K^α $[\,\mathrm{cm}^{-1}]$, coïncide avec la dimension du 4-vecteur impulsion P^α $[\,\mathrm{g}]$. La masse relativiste m qui est ici différente de zéro pour les particules sans masse, s'obtient à partir de l'équivalent énergie $E = mc^2$. A titre d'exemple, un photon d'énergie $E = 1\,\mathrm{MeV} = 1.6\times10^{-6}\,\mathrm{erg}$, correspond à sa masse relativiste $m = 1.8\times10^{-28}\,\mathrm{g}$.

Le 4-vecteur impulsion (4.75) dépend donc de sa forme, et peut décrire à la fois le mouvement des particules massives (trajectoires non isotropes), et celui des particules dépourvues de masse (trajectoire isotrope). En fait, pour les particules sans masse $m_0 = 0$ et $ds = 0$, leur rapport dans (4.75) est une indétermination $\frac{0}{0}$. Néanmoins, la transition de (4.75) $\frac{m_0}{ds}$ à $\frac{m}{d\sigma}$, lève cette indétermination, car la masse relativiste de toute particule sans masse est $m \neq 0$, et donc le long de leur trajectoire, nous aurons $d\sigma \neq 0$.

Dans la forme applicable aux particules sans masse (trajectoires iso-

tropes), il est évident que le carré de P^α (4.75) est nul

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = m^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = m^2 \frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0\,. \tag{4.76}$$

On écrit ensuite les projections chr.inv. du 4-vecteur impulsion d'une particule sans masse $P^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\sigma}$

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c}\, m c^i, \tag{4.77}$$

où c^i est le vecteur chr.inv. de la vitesse de la lumière. Dans ce dernier cas, le vecteur d'impulsion du spin de la particule (4.39) est aussi isotrope

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2}\, \eta_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{c^2}\, \eta \frac{dx^\alpha}{c d\tau} = \frac{1}{c^2}\, \eta \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{4.78}$$

car son carré est nul

$$S_\alpha S^\alpha = g_{\alpha\beta}\, S^\alpha S^\beta = \frac{1}{c^4}\, \eta^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha dx^\beta}{d\sigma^2} = \frac{1}{c^4}\, \eta^2 \frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0\,, \tag{4.79}$$

et donc le carré du vecteur global associé à la particule $Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha$, est lui aussi nul

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm \frac{1}{c^2}\, \eta\,, \qquad S^i = \frac{1}{c^3}\, \eta c^i. \tag{4.80}$$

On voit alors que sa projection spatiale observable coïncide avec celle d'une particule massive (4.51), qui possède la vitesse chr.inv. de la lumière c^i, au lieu de la vitesse observable v^i de la particule (4.51). Par voie de conséquence, les projections chr.inv. du vecteur global pour les particules à spin dépourvues de masse, s'écrivent

$$\varphi = \pm\Big(m + \frac{1}{c^2}\, \eta\Big), \qquad q^i = \frac{1}{c}\, m c^i + \frac{1}{c^3}\, \eta c^i. \tag{4.81}$$

Ayant substitué ces quantités pour φ positif, dans les formules initiales (4.42, 4.43), on parvient aux équations chr.inv. du mouvement de la particule à spin sans masse, située dans notre Univers (la particule voyage du passé vers le futur), c'est-à-dire

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\, F_i c^i + \frac{m}{c^2}\, D_{ik} c^i c^k = -\frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\, F_i c^i - \frac{\eta}{c^4}\, D_{ik} c^i c^k, \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(m c^i\right) + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) c^k - m F^i + m \Delta^i_{nk} c^n c^k = \\ &\quad = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau}\left(\eta c^i\right) - \frac{2\eta}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) c^k + \frac{\eta}{c^2}\, F^i - \frac{\eta}{c^2}\, \Delta^i_{nk} c^n c^k, \end{aligned} \tag{4.83}$$

et pour la particule analogue dans l'Univers miroir (elle se déplace du futur vers le passé), on obtient après substitution des quantités (4.81) pour $\varphi < 0$, les équations du mouvement chr.inv.

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\, F_i c^i + \frac{m}{c^2}\, D_{ik} c^i c^k = \frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4}\, F_i c^i - \frac{\eta}{c^4}\, D_{ik} c^i c^k, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(mc^i\right) + mF^i + m\Delta^i_{nk} c^n c^k = \\ &\qquad = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta c^i\right) - \frac{\eta}{c^2}\, F^i - \frac{\eta}{c^2}\, \Delta^i_{nk} c^n c^k. \end{aligned} \quad (4.85)$$

§ 4.4 Conditions physiques de l'interaction du spin

Ainsi que l'avons vu, le spin d'une particule (son moment cinétique propre), interagit avec un champ extérieur représentant la rotation d'espace décrite par le tenseur de non holonomicité d'espace $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}\right)$, et qui dépend du rotationnel du 4-vecteur vitesse b^α de l'observateur, par rapport à son corps physique de référence. Au cours des processus électromagnétiques, la charge d'une particule interagit avec un champ électromagnétique extérieur — le champ du tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$. Par suite, il semble alors naturel de comparer les projections chr.inv. du tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta}$, avec les projections chr.inv. du tenseur de non holonomicité d'espace $A_{\alpha\beta}$.

Au chapitre 3, nous avons montré que le tenseur de Maxwell $F_{\alpha\beta}$ induit deux groupes de projections chr.inv., engendrés par le tenseur lui-même, et son pseudo-tenseur dual* $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} &= E^i, \qquad & F^{ik} &= H^{ik} \\ \frac{F_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} &= H^{*i}, \qquad & F^{*ik} &= E^{*ik} \end{aligned}\right\}. \quad (4.86)$$

Par ailleurs, les projections chr.inv. du tenseur de non holomicité $A_{\alpha\beta}$ (4.11), et ceux de son pseudo-tenseur $A^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, E^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\mu\nu}$ sont

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} &= 0\,, \qquad & A^{ik} &= h^{im} h^{kn} A_{mn} \\ \frac{A_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} &= 0\,, \qquad & A^{*ik} &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad (4.87)$$

*Ici, $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ représente le 4-tenseur discriminant complètement antisymétrique, qui permet de former les pseudo-tenseurs dans l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel, voir §2.3 du chapitre 2, pour plus de détails.

Comparant les formules, on voit que l'analogie de l'interaction du spin ne s'applique que pour la contribution "magnétique" $\mathcal{H}^{ik} = A^{ik} = h^{im}h^{kn}A_{mn}$, du champ d'espace non holonome. La contribution "électrique" du champ dans l'interaction du spin, se réduit à $\mathcal{E}^i = \frac{A_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = 0$ comme il fallait s'y attendre. En effet, le champ de rotation intrinsèque d'une particule (son spin), interagit avec le champ d'espace non holonome, comme avec n'importe quel autre champ extérieur, et ce, pour produire un mouvement.

Par ailleurs, la composante "magnétique" du champ non holonome $\mathcal{H}^{ik} = A^{ik} \neq 0$ ne peut être dual à zéro $\mathcal{H}^{*i} = \frac{A_{0\cdot}^{*\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = 0$. La similitude totale avec les champs électromagnétiques est de ce fait incomplète. On ne peut toutefois pas atteindre une correspondance formelle, car le tenseur de non holonomicité $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu}\right)$ apparaît comme un rotationnel "rapporté", par rapport au tenseur de Maxwell, qui est un rotationnel "pur" $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$. Il reste qu'une analyse plus poussée devrait permettre d'aboutir à une théorie de l'interaction du spin en harmonie complète avec l'électrodynamique.

L'incomplétude de la théorie, conduit aussi à un autre résultat. Si on définit la force de l'interaction du spin de la même façon que la force de Lorentz $\Phi^\alpha = \frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^{\alpha\cdot} U^\sigma$, la formule obtenue $\Phi^\alpha = \frac{\eta_0}{c^2} A_{\cdot\sigma}^{\alpha\cdot} U^\sigma$, ne contient pas l'ensemble des termes dans les membres de droite des équations du mouvement des particules à spin.

Mais la force extérieure, qui agit sur la particule, doit par définition inclure tous les facteurs qui sont responsables de la déviation géodésique de la particule, c'est-à-dire tous les termes des membres de droite des équations du mouvement. En d'autres termes, la 4-force d'interaction du spin, Φ^α [g/s], est définie par

$$\Phi^\alpha = \frac{DS^\alpha}{ds} = \frac{dS^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} S^\mu \frac{dx^\nu}{ds}\,, \tag{4.88}$$

dont la projection chr.inv. sur la section spatiale, après division par c, exprime la force observable tridimensionnelle de l'interaction Φ^i [g cm/s^2]. Par exemple, pour une particule massive située dans notre Univers, on aura à partir de (4.71)

$$\Phi^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta \mathrm{v}^i\right) - \frac{2\eta}{c^2}\left(D^i_k + A_{k\cdot}^{\cdot i}\right)\mathrm{v}^k + \frac{\eta}{c^2} F^i - \frac{\eta}{c^2}\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \tag{4.89}$$

Au moyen d'une comparaison analogue entre l'interaction électromagnétique et le spin, et en exploitant la similitude avec les invariants du champ électromagnétique (3.25, 3.26), on en déduit les invariants du

champ d'espace non holonome sous la forme

$$J_1 = A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = A_{ik}A^{ik} = \varepsilon_{ikm}\,\varepsilon^{ikn}\Omega^{*m}\Omega_{*n} = 2\Omega_{*i}\Omega^{*i}, \tag{4.90}$$

$$J_2 = A_{\alpha\beta}A^{*\alpha\beta} = 0\,. \tag{4.91}$$

On voit que l'invariant scalaire $J_1 = 2\Omega_{*i}\Omega^{*i}$ est toujours non nul, sinon l'espace serait holonome (absence de rotation), et il n'existerait pas d'interaction du spin.

Nous abordons maintenant les conditions physiques du mouvement des particules élémentaires à spin. Utilisant la définition du vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle

$$F_i = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t}\right) = -\,c^2\,\frac{\partial \ln\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial v_i}{\partial t} \tag{4.92}$$

on peut formuler le tenseur de non holonomicité A_{ik} comme suit

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial v_i}{\partial x^k}\right) + v_i\,\frac{\partial \ln\sqrt{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}}{\partial x^k} - v_k\,\frac{\partial \ln\sqrt{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}}{\partial x^i}\,. \tag{4.93}$$

On peut alors voir que le tenseur A_{ik} représente le rotationnel tridimensionnel observable de la vitesse linéaire de rotation d'espace, augmenté de deux termes supplémentaires engendrés par le potentiel de gravitation w, et la rotation d'espace. Par contre, en raison de la faible valeur numérique de la constante de Planck, l'interaction du spin ne doit perturber que les particules élémentaires.

Ainsi que nous le savons, à de telles échelles de masses et de distances, l'intensité de l'interaction gravitationnelle n'est que de quelques ordres de grandeur, inférieure à celles des interactions électromagnétiques, faibles (spin), ou fortes. Nous pouvons donc supposer $\mathrm{w} \to 0$, pour l'interaction du spin, dans la formule pour A_{ik} (4.93).

Dans ce cas, à l'échelle microphysique des particules élémentaires, le tenseur A_{ik} devient le rotationnel physiquement observable dans sa "stricte" notation

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial v_i}{\partial x^k}\right), \tag{4.94}$$

tandis que la force d'inertie gravitationnelle active (4.92), contient seulement sa partie inertielle

$$F_i = -\frac{{}^*\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial v_i}{\partial t}\,. \tag{4.95}$$

Les identités de Zelmanov

$$\frac{2}{\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right)+\varepsilon^{ijk}\,{}^*\nabla_j\,F_k=0\,,\quad {}^*\nabla_k\,\Omega^{*k}+\frac{1}{c^2}\,F_k\Omega^{*k}=0\,,\quad (4.96)$$

qui relient la rotation d'espace à la force d'inertie gravitationnelle qui lui est appliquée, devient pour les particules élémentaires ($\mathrm{w}\to 0$)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\right)+\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\left(\frac{{}^*\partial^2 v_k}{\partial x^j\partial t}-\frac{{}^*\partial^2 v_j}{\partial x^k\partial t}\right)=0\\&{}^*\nabla_k\,\Omega^{*k}-\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t}\,\Omega^{*k}=0\end{aligned}\right\}.\qquad (4.97)$$

Lorsqu'on substitue ici $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t}=0$, en supposant donc que la rotation observable de l'espace soit stationnaire, on obtient ${}^*\nabla_k\,\Omega^{*k}=0$, c'est-à-dire que le pseudo-vecteur de rotation d'espace demeure inchangé. La 1ère identité de Zelmanov devient

$$\Omega^{*i}D+\frac{{}^*\partial\Omega^{*i}}{\partial t}=0\,,\qquad (4.98)$$

d'où l'on peut voir que $D=\det\|D^n_n\|=\frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial t}$, et le taux de dilatation relative du volume élémentaire d'espace, est nul $D=0$.

Par conséquent, dans les rotations d'espace stationnaire $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t}=0$, les équations suggèrent que pour les particules élémentaires ($\mathrm{w}\to 0$), le tenseur des vitesses angulaires de cette rotation, demeure inchangé ${}^*\nabla_k\,\Omega^{*k}=0$, et les dilatations relatives de l'espace (déformations) sont absentes $D=0$.

Il est alors tout-à-fait concevable que le caractère stationnaire du champ non holonome de l'espace (le champ extérieur interagissant avec le spin), soit la condition nécessaire de stabilité pour la particule élémentaire soumise à cette influence. En dehors de ces considérations, nous pouvons conclure que les particules à spin et à longue durée de vie, devraient être animées de rotations intrinsèques stables, tandis que les particules à courte durée de vie, seraient elles, représentables par des tourbillons spatiaux instables.

L'étude des particules à courte durée de vie, se révèle néanmoins problématique, en raison du manque de données expérimentales relatives à la structure des tourbillons instables qui en seraient à l'origine. Parallèlement, les particules à longue durée de vie, peuvent par contre, faire l'objet d'une étude dont les solutions sont précises (champ stationnaire de la rotation d'espace). Un telle étude va faire l'objet du prochain paragraphe §4.5.

§ 4.5 Mouvement des particules élémentaires en rotation

Ainsi que nous l'avons vu, la petitesse de la constante de Planck infinitésimale, ne concerne que le domaine des particules élémentaires, où l'intensité des interactions gravitationnelles n'est inférieure que de quelques ordres de grandeur, aux interactions faibles et fortes. Par suite, en supposant $\mathrm{w} \to 0$, dans les équations chr.inv. du mouvement des particules à spin, (4.70–4.73), et (4.82–4.85), on parvient aux équations chr.inv. du mouvement des particules élémentaires. Au paragraphe précédent (§4.4), nous avions du reste, déduit que dans les rotations stationnaires d'espace $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t} = 0$, à l'échelle des particules élémentaires, la trace du tenseur des déformations d'espace est nulle $D = 0$. Bien entendu, la nullité de la trace d'un tenseur n'entraîne pas nécessairement que le tenseur soit lui-même nul. Par contre, la déformation d'espace est un phénomène rare, et donc, nous supposerons ici légitimement $D_{ik} = 0$.

Au paragraphe §4.3, nous avons montré que dans les rotations stationnaires d'espace, la condition de conservation pour le vecteur impulsion de spin S^α d'une particule à spin arbitraire, devient (4.68), et donc

$$n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\mathrm{v}^k \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^k}\big(\sqrt{h}\,\Omega^{*i}\big) = 0\,. \tag{4.99}$$

Par ailleurs, pour $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t} = 0$, les identités de Zelmanov appliquées aux particules élémentaires (4.97) impliquent

$$^*\nabla_k\,\Omega^{*k} = \frac{\partial \Omega^{*k}}{\partial x^k} + \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial x^k}\,\Omega^{*k} = \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^k}\big(\sqrt{h}\,\Omega^{*k}\big) = 0\,. \tag{4.100}$$

La première condition est vérifiée si $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{h}\,\Omega^{*k}) = 0$, ce qui est vrai lorsque le pseudo-vecteur de rotation d'espace, est

$$\Omega^{*i} = \frac{\Omega^{*i}_{(0)}}{\sqrt{h}}\,, \qquad \Omega^{*i}_{(0)} = \mathit{conste}\,. \tag{4.101}$$

Compte tenu de ce qui a été dit précédemment de (4.70, 4.71), et après calculs, on trouve les équations chr.inv. du mouvement d'une particule élémentaire massive. Pour la particule de notre Univers (se déplaçant vers le futur), les équations s'écrivent

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau}\,, \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\big(m\mathrm{v}^i\big) + 2mA^{\cdot i}_{k\cdot}\mathrm{v}^k + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &\qquad = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\big(\eta\mathrm{v}^i\big) - \frac{2\eta}{c^2}A^{\cdot i}_{k\cdot}\mathrm{v}^k - \frac{\eta}{c^2}\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Alors que pour les particules de l'Univers miroir voyageant dans le passé, on obtient à partir de (4.72, 4,73)

$$-\frac{dm}{d\tau} = \frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau}\,, \tag{4.104}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\mathrm{v}^i\right) - \frac{\eta}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \tag{4.105}$$

Ainsi que l'on peut facilement le voir, les équations chr.inv. du mouvement sont les mêmes pour les particules de notre Univers et celles de l'Univers miroir. Intégrant l'équation scalaire pour la particule de notre Univers (écoulement du temps direct), à savoir

$$\int_{\tau_1=0}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) d\tau = 0\,, \tag{4.106}$$

on obtient

$$m + \frac{\eta}{c^2} = conste = B\,, \tag{4.107}$$

où B est la constante d'intégration définissable à partir des conditions initiales.

Pour illustrer le sens physique de l'intégrale des forces vives, on peut établir une comparaison entre les projections chr.inv.

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} &= \pm\, m\,, \qquad & P^i &= \frac{1}{c}\,m\mathrm{v}^i = \frac{1}{c}\,p^i \\ \frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} &= \pm\,\frac{1}{c^2}\,\eta\,, \qquad & S^i &= \frac{1}{c^3}\,\eta\,\mathrm{v}^i \end{aligned}\right\} \tag{4.108}$$

du 4-vecteur impulsion de la particule, et celles du vecteur impulsion de spin, c'est-à-dire entre $P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}$ et $S^\alpha = \frac{\eta_0}{c^2}\frac{dx^\alpha}{ds}$. Par analogie avec la masse relativiste $\pm m$, la quantité $\pm\frac{1}{c^2}\,\eta$ sera appelée ici la masse de spin relativiste, et ainsi, la quantité $\frac{1}{c^2}\,\eta_0$ représentera la masse de spin au repos. De plus, sous les conditions précitées, le théorème des forces vives appliqué aux particules élémentaires à spin, implique que la somme de la masse relativiste et de sa masse de spin, demeure inchangée le long de la trajectoire.

Examinons à présent les équations du mouvement d'une particule élémentaire massive appartenant à notre Univers (4.103), en appliquant l'intégrale des forces vives*. Substituant cette dernière intégrale (4.107)

*La solution de l'équation scalaire du mouvement chr.inv.

dans (4.103), en ayant annulé les constantes, on obtient les équations dynamiques sous la forme dépouillée

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} + 2A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k + \Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0\,, \tag{4.109}$$

qui sont dans ce cas, géodésiques. Le terme $\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k$, contraction des symboles de Christoffel chr.inv., avec la vitesse observable de la particule, est relativiste en ce qu'il est une fonction quadratique de la vitesse. Ce terme peut être négligé si la métrique observable $h_{ik} = -\,g_{ik} + \frac{1}{c^2}v_i v_k$, le long de la trajectoire est quasi euclidienne, ce qui est toujours réalisable lorsque la vitesse de rotation d'espace est de très loin inférieure à celle de la vitesse de la lumière, et pourvu que la métrique g_{ik} soit elle-même euclidienne.

Alors, les composantes diagonales du tenseur métrique chr.inv. se réduisent à

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = +1\,, \tag{4.110}$$

toutes les autres $h_{ik} = 0$, si $i \neq k$. Il est intéressant de remarquer que la 4-métrique ne peut pas être ici galiléenne, du fait de la rotation de la section spatiale par rapport au temps. Autrement dit, même si le 3-espace observable (section spatiale), est plan, l'espace quadridimensionnel n'est pas minkowskien, mais un espace pseudo-riemannien dont la métrique est

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}\,dx^0dx^0 + 2g_{0i}\,dx^0dx^i + g_{ik}\,dx^idx^k = \\ &= c^2dt^2 + 2g_{0i}\,c\,dt\,dx^i - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2. \end{aligned} \tag{4.111}$$

Nous supposons ici que la vitesse angulaire de rotation d'espace, est constante $\Omega = conste$, autour de l'axe x^3, par exemple.

Dans ce cas précis, la vitesse linéaire de cette rotation $v_i = \Omega_{ik}x^k$, devient

$$v_1 = \Omega_{12}x^2 = \Omega\,y\,, \qquad v_2 = \Omega_{21}x^1 = -\Omega\,x\,, \tag{4.112}$$

où $A_{ik} = \Omega_{ik}$. Par suite, le tenseur de non holonomicité d'espace A_{ik} possède 2 composantes non nulles

$$A_{12} = -A_{21} = -\,\Omega\,. \tag{4.113}$$

Les équations vectorielles du mouvement chr.inv. (4.109) deviennent alors

$$\frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau} + 2\Omega\mathrm{v}^2 = 0\,, \quad \frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau} - 2\Omega\mathrm{v}^1 = 0\,, \quad \frac{d\mathrm{v}^3}{d\tau} = 0\,, \tag{4.114}$$

où la 3ème équation admet la solution immédiate

$$\mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^3_{(0)} = \mathit{conste}. \tag{4.115}$$

Compte tenu de $\mathrm{v}^3 = \frac{dx^3}{d\tau}$, on représentera x^3 comme suit

$$x^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}\tau + x^3_{(0)}\,, \tag{4.116}$$

où $x^3_{(0)}$ représente la valeur numérique de la coordonnée x^3 à l'instant initial $\tau = 0$. De la première équation (4.114), on déduit pour v^2

$$\mathrm{v}^2 = -\frac{1}{2\Omega}\frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau}\,. \tag{4.117}$$

Différentiant cette dernière équation par rapport à $d\tau$, on obtient

$$\frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau} = -\frac{1}{2\Omega}\frac{d^2\mathrm{v}^1}{d\tau^2}\,, \tag{4.118}$$

et substituant ensuite dans la seconde équation de (4.114), il vient

$$\frac{d^2\mathrm{v}^1}{d\tau^2} + 4\Omega^2\mathrm{v}^1 = 0\,, \tag{4.119}$$

c'est-à-dire l'équation de l'oscillateur libre. Sa solutions s'écrit

$$\mathrm{v}^1 = C_1\cos(2\Omega\tau) + C_2\sin(2\Omega\tau)\,, \tag{4.120}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration (4.119) qui sont définies à partir des conditions $\tau = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{v}^1_{(0)} = C_1 \\ &\left.\frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -2\Omega C_1\sin(2\Omega\tau)|_{\tau=0} + 2\Omega C_2\cos(2\Omega\tau)|_{\tau=0} \end{aligned}\right\}, \tag{4.121}$$

d'où $C_1 = \mathrm{v}^1_{(0)}$, $C_2 = \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}$, $\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)} = \frac{d\mathrm{v}^1}{d\tau}\big|_{\tau=0}$ on obtient alors finalement l'équation pour v^1, sous la forme

$$\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)}\cos(2\Omega\tau) + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\sin(2\Omega\tau)\,, \tag{4.122}$$

d'où l'on voit que la vitesse de la particule élémentaire à spin massive, effectue des oscillations sinusoïdales suivant x^1, à une fréquence égale au double de la vitesse angulaire de rotation d'espace.

Prenant en compte $\mathrm{v}^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$, nous intégrerons la formule déduite (4.122), par rapport à $d\tau$. Il vient ainsi

$$x^1 = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \cos(2\Omega\tau) + C_3 \,. \tag{4.123}$$

En supposant qu'à l'instant initial $\tau = 0$, on ait $x^1 = x^1_{(0)}$, on pourra écrire la constante d'intégration $C_3 = x^1_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2}$. Nous aurons ainsi

$$x^1 = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \cos(2\Omega\tau) + x^1_0 + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \,, \tag{4.124}$$

et donc, la coordonnée x^1 de la particule élémentaire effectue elle aussi des oscillations libres de fréquence 2Ω.

Ayant maintenant substitué les v^1 (4.122) dans la seconde équation (4.114), on parvient à

$$\frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau} = 2\Omega \mathrm{v}^1_{(0)} \cos(2\Omega\tau) + \dot{\mathrm{v}}^1_{(0)} \sin(2\Omega\tau) \,, \tag{4.125}$$

qui, après intégration donne v^2

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^1_{(0)} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + C_4 \,. \tag{4.126}$$

Supposant $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}(\tau = 0)$, on obtient la constante $C_3 = \mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}$. Alors

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^1_{(0)} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega} \,. \tag{4.127}$$

Compte tenu de $\mathrm{v}^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$, on intègre la formule par rapport à $d\tau$. On obtient alors la formule pour la coordonnée x^2 de cette particule, à savoir

$$x^2 = -\frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \mathrm{v}^2_{(0)}\tau + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\tau}{2\Omega} + C_5 \,. \tag{4.128}$$

Les constantes d'intégration peuvent s'obtenir à partir des conditions $x^2 = x^2_{(0)}$, pour $\tau = 0$, $C_5 = x^2_{(0)} + \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}$. En définitive, la coordonnée x^2, est

$$\begin{aligned} x^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\tau + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\tau}{2\Omega} - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{4\Omega^2} \sin(2\Omega\tau) - \\ - \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + x^2_{(0)} + \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} \,. \end{aligned} \tag{4.129}$$

A partir de cette formule on voit que : si à l'instant initial du temps observable $\tau = 0$, la particule élémentaire à spin massive avait la vitesse $\mathrm{v}^2_{(0)}$ suivant x^2, et l'accélération $\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}$ suivant x^1, celle-ci, ainsi que les oscillations libres de la coordonnée x^2 à la fréquence double de la rotation d'espace Ω, est soumise à un déplacement linéaire $\Delta x^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\tau + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\tau}{2\Omega}$.

En se référant à l'intégrale des forces vives (la solution des équations scalaires du mouvement chr.inv.), relative à cette particule $m + \frac{\eta}{c^2} = B = conste$ (4.107), on trouve la constante d'intégration B. Écrivant (4.107) sous la forme

$$m_0 + \frac{\eta_0}{c^2} = B\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,, \tag{4.130}$$

et le carré de vitesse observable de la particule est $\mathrm{v}^2 = conste$. Puisque les composantes de la vitesse ont été déjà définies, on peut écrire la formule relative à son carré, comme suit

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{v}^1\right]^2 + \left[\mathrm{v}^2\right]^2 + \left[\mathrm{v}^3\right]^2 &= \left[\mathrm{v}^1_{(0)}\right]^2 + \left[\mathrm{v}^2_{(0)}\right]^2 + \left[\mathrm{v}^3_{(0)}\right]^2 + \frac{\left[\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\right]^2}{2\Omega^2} + \\ &+ \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}\dot{\mathrm{v}}^2_{(0)}}{\Omega} + 2\left[\mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\right]\left[\mathrm{v}^1_{(0)}\sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)}}{2\Omega}\cos(2\Omega\tau)\right]\end{aligned} \tag{4.131}$$

(ceci en tenant compte que la 3-métrique en question, est euclidienne).

On voit que le carré de la vitesse demeure inchangé si $\dot{\mathrm{v}}^2_{(0)} = 0$, et $\dot{\mathrm{v}}^1_{(0)} = 0$. La constante B de l'intégrale des forces vives est

$$B = \frac{m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,, \qquad \left[\mathrm{v}^2_{(0)}\right]^2 = \left[\mathrm{v}^1_{(0)}\right]^2 + \left[\mathrm{v}^3_{(0)}\right]^2 = conste\,, \tag{4.132}$$

tandis que l'intégrale des forces vives (4.170) devient

$$m + \frac{\eta}{c^2} = \frac{m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,, \tag{4.133}$$

et constitue donc la condition de conservation pour la somme de la masse relativiste m de la particule et de sa masse de spin $\frac{\eta}{c^2}$.

Tout ce qui a été dit à propos des particules élémentaires, nécessite ici quelques remarques. Dans la définition $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$, compte tenu que $A_{mn} = \varepsilon_{mnk}\Omega^{*k}$, on a

$$\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn} = 2n\hbar_{*k}\Omega^{*k}, \tag{4.134}$$

où $\hbar_{*k} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{nmk}\hbar^{mn}$. Donc, η_0 est le produit scalaire de pseudo-vecteurs tridimensionnels : celui du moment intrinsèque $\hbar_{*k}$ de la particule élémentaire, et celui de la vitesse angulaire de rotation d'espace Ω^{*k}. L'interaction du spin est donc absente, si les pseudo-vecteurs de la rotation de la particule et du champ extérieur de rotation d'espace, sont colinéaires.

Revenons à présent aux équations du mouvement des particules à spin. Prenant en compte les constantes d'intégration obtenues, les équations chr.inv. du mouvement des particules à spin massives situées dans notre Univers, ont les solutions

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)}\cos(2\Omega\tau)\,, && x^1 = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\sin(2\Omega\tau) + x^1_{(0)} \\ &\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\sin(2\Omega\tau)\,, && x^2 = -\frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}\cos(2\Omega\tau) + \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega} + x^2_{(0)} \\ &\mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}, && x^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}\tau + x^3_{(0)} \end{aligned}\right\}. \quad (4.135)$$

Examinons alors la forme de la courbe spatiale suivie par la particule. Nous fixons le système de référence de l'observateur, de telle sorte que le déplacement initial de la particule soit égal à zéro $x^1_{(0)} = x^2_{(0)} = x^3_{(0)} = 0$. A un instant arbitraire, toutes les composantes spatiales peuvent s'écrire

$$x^1 = x = a\sin(2\Omega\tau)\,, \quad x^2 = y = a\big[1-\cos(2\Omega\tau)\big], \quad x^3 = z = b\tau\,, \quad (4.136)$$

où $a = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{2\Omega}$, $b = \mathrm{v}^3_{(0)}$. Les solutions obtenues pour les coordonnées sont les solutions paramétriques d'une surface, sur laquelle se déplace la particule. Afin de mieux visualiser ce type de surface, on peut passer des notations paramétriques à celles de coordonnées en éliminant le paramètre τ, dans ces équations. Elevant au carré les équations pour x et y, il vient

$$x^2 + y^2 = 2a^2\big[1 - \cos(2\Omega\tau)\big] = 4a^2\sin^2(\Omega\tau) = 4a^2\sin^2\frac{z\Omega}{b}\,. \quad (4.137)$$

Les résultats ainsi déduits, présentent toutes les caractéristiques de l'équation d'une hélice $x^2 + y^2 = a^2$, $z = b\tau$. Néanmoins, la similitude est incomplète — la particule voyage le long de la surface d'un cylindre à la vitesse constante $b = \mathrm{v}^3_{(0)}$, suivant son axe z, alors que son rayon oscille à la fréquence Ω, dans l'intervalle* compris entre zéro et son maximum $2a = \frac{\mathrm{v}^1_{(0)}}{\Omega}$, pour $z = \frac{\pi k b}{2\Omega}$.

*Où $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Si $\mathrm{v}^3_{(0)} = 0$, la particule oscille simplement dans le plan $x\,y$ (section du cylindre).

La trajectoire de la particule élémentaire à spin massive, située dans notre Univers, prend l'aspect d'une hélice enroulée autour d'un cylindre oscillant. La durée de vie de cette particule est égale à la longueur du cylindre, divisée par sa vitesse le long de z (axe du cylindre). Les oscillations du cylindre figurent les "pulsations" de la particule. Le cylindre ainsi défini représente le *cylindre des évènements* de la particule, à partir de son apparition dans notre Univers (acte de matérialisation), jusqu'à sa fin (dématérialisation). Cependant, même après sa fin, son cylindre des évènements ne disparaît pas totalement, car il se *divise* en d'autres petits cylindres semblables, rattachés à d'autres particules issues de la désintégration, soit dans notre Univers, ou dans l'Univers miroir.

Par conséquent, l'analyse de l'apparition ou de la disparition (désintégration) des particules élémentaires en relativité générale, implique l'étude des points de ramifications des cylindres des particules, en considérant leurs possibles extensions dans l'Univers miroir. Si nous envisageons le mouvement de deux particules à spin liées, qui tournent autour d'un centre de masses commun, par exemple celui du positronium (système constitué d'un électron et d'un positron), on est immédiatement conduit à l'image hélicoïdale double de l'ADN, dont les "pas" (liens avec les particules), s'enroulent autour du cylindre oscillant de leurs évènements.

Trouvons maintenant les équations chr.inv. du mouvement des particules à spin massives, qui se déplacent dans l'Univers miroir, un univers caractérisé par un écoulement du temps inversé. Selon les conditions physiques précitées*, les équations mentionnées (4.104, 4.105) deviennent

$$-\frac{dm}{d\tau} = \frac{1}{c^2}\frac{d\eta}{d\tau}\,, \tag{4.138}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\eta\,\mathrm{v}^i\right). \tag{4.139}$$

La solution de l'équation scalaire du mouvement chr.inv. est l'intégrale des forces vives $m + \frac{\eta}{c^2} = B = conste$, comme c'était le cas pour les particules analogues situées dans notre Univers (4.107). En la substituant dans les équations vectorielles chr.inv. (4.139), on obtient la solution

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} = 0\,, \tag{4.140}$$

et donc $\mathrm{v}^i = \mathrm{v}^i_{(0)} = conste$. Du point de vue d'un observateur régulier, ce résultat implique que la particule à spin massive, voyage dans l'Univers

*A savoir — la rotation stationnaire de l'espace à faible vitesse, l'absence de déformations d'espace, et la 3-métrique euclidienne.

miroir à une vitesse constante, contrairement à la particule de notre Univers, dont le mouvement observable s'effectue en suivant une trajectoire hélicoïdale oscillante.

Par ailleurs, du point de vue d'un observateur hypothétique, qui serait situé dans l'Univers miroir, le mouvement des particules à spin massives appartenant à notre Univers, apparaîtrait linéaire et uniforme, alors que celui des particules de son Univers miroir suivrait une "hélice" oscillante.

D'une façon identique, on pourrait tenter d'évaluer le mouvement des particules à spin dépourvues de masse (du genre lumière), mais notre approximation de la vitesse linéaire de rotation d'espace, négligeable par rapport à la vitesse de la lumière, ne suffit plus, et constitue donc un sérieux obstacle pour la résolution de ce problème. On peut néanmoins légitimement penser que les méthodes de résolution sont les mêmes, pour les deux types de particules.

§ 4.6 Particule en rotation dans un champ électromagnétique

Dans ce paragraphe, nous allons déduire les équations chr.inv. du mouvement d'une particule qui possède à la fois un spin et une charge électrique, et qui se déplace dans un espace pseudo-riemannien balayé par un champ électromagnétique. Le vecteur global de la particule est

$$Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2}\, A^\alpha + S^\alpha, \tag{4.141}$$

où P^α est le vecteur quadridimensionnel d'impulsion de la particule. Les deux 4-vecteurs restants sont des impulsions supplémentaires, communiquées à la particule et qui sont dues à l'interaction de sa charge, avec le champ électromagnétique, ainsi que celle de son spin avec le champ non holonome de l'espace. Etant donné que les vecteurs P^α et S^α sont tangents à la trajectoire quadridimensionnelle de la particule, on peut légitimement supposer le vecteur A^α (potentiel du champ électromagnétique) soit lui-même tangent à cette trajectoire. Dans ce cas, le vecteur est $A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$, tandis que la formule $q^i = \frac{\varphi}{c}\, \mathrm{v}^i$ (voir §3.8) fixe la relation entre le potentiel scalaire φ et le potentiel vecteur q^i du champ électromagnétique.

Les projections chr.inv. $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{q}^i$ du vecteur global Q^α de la particule considérée (4.141), sont

$$\tilde{\varphi} = \pm \left(m + \frac{e\varphi}{c^2} + \frac{\eta}{c^2} \right), \quad \tilde{q}^i = \frac{1}{c^2}\, m\mathrm{v}^i + \frac{1}{c^3}\, (\eta + e\varphi)\, \mathrm{v}^i, \tag{4.142}$$

où m est la masse relativiste de la particule, φ est le potentiel scalaire du champ électromagnétique actif, tandis que η décrit l'interaction du spin de la particule avec le champ non holonome de l'espace

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{4.143}$$

D'une façon générale, les équations peuvent être déduites de la même manière que celles relatives à une particule chargée, et à une particule neutre à spin, à la différence que nous devons projeter la dérivée absolue de la somme des trois vecteurs. Utilisant les formules pour $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{q}^i$ (4.142), on obtient les équations chr.inv. du mouvement de la particule massive à spin chargée située dans notre Univers (elle se déplace du passé vers le futur)

$$\begin{aligned} &\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\,(\eta + e\varphi) + \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \end{aligned} \tag{4.144}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left[(\eta + e\varphi)\,\mathrm{v}^i\right] - \frac{2\,(\eta + e\varphi)}{c^2}\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k + \\ &\qquad + \frac{\eta + e\varphi}{c^2}\,F^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k, \end{aligned} \tag{4.145}$$

alors que la particule analogue appartenant à l'Univers miroir (qui se déplace du futur vers le passé), est

$$\begin{aligned} &-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \\ &\quad = \frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\,(\eta + e\varphi) + \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,F_i\mathrm{v}^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^4}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k, \end{aligned} \tag{4.146}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(m\mathrm{v}^i\right) + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left[(\eta + e\varphi)\,\mathrm{v}^i\right] - \frac{\eta + e\varphi}{c^2}F^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^2}\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k. \end{aligned} \tag{4.147}$$

Dans les espaces riemanniens, le transport parallèle préserve la longueur des vecteurs transportés. Leur carré est donc invariant dans n'importe quel système de référence, et en particulier dans le référentiel

d'accompagnement

$$\begin{aligned} Q_\alpha Q^\alpha &= g_{\alpha\beta}\left(P^\alpha + \frac{e}{c^2}A^\alpha + S^\alpha\right)\left(P^\beta + \frac{e}{c^2}A^\beta + S^\beta\right) = \\ &= g_{\alpha\beta}\left(m_0 + \frac{e\varphi_0}{c^2} + \frac{\eta_0}{c^2}\right)^2 \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \left(m_0 + \frac{e\varphi_0}{c^2} + \frac{\eta_0}{c^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.148}$$

Au §3.9, en introduisant une direction spécifique du 4-potentiel électromagnétique A^α par rapport à la trajectoire d'une particule chargée, nous avons montré que le champ se déplace, et nous avons pu simplifier substantiellement les membres de droite des équations chr.inv. de son mouvement.

Le membre de droite des équations vectorielles du mouvement chr. inv. devient la force de Lorentz chr.inv. $\Phi^i = -e\big(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\big)$, alors que le membre de droite de l'équation scalaire chr.inv. s'obtient en formant le produit scalaire du vecteur champ électrique E_i, avec la vitesse observable de la particule. A l'aide de ces éléments, nous allons exprimer les équations chr.inv. déduites (4.144–4.147) sous une forme particulière. Pour la particule située dans notre Univers, on a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)F_i\mathrm{v}^i + \\ &\qquad + \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}E_i\mathrm{v}^i, \end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right] + 2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\left(D^i_k + A^i_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - \left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)F^i + \\ &\qquad + \left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \end{aligned} \tag{4.150}$$

Et pour la particule analogue de l'Univers miroir, il vient

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)F_i\mathrm{v}^i + \\ &\qquad + \frac{1}{c^2}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right)D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = -\frac{e}{c^2}E_i\mathrm{v}^i, \end{aligned} \tag{4.151}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right] + \left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)F^i + \left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = \\ &\qquad = -e\left(E^i + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_k H_{*m}\right). \end{aligned} \tag{4.152}$$

Afin de pouvoir conclure très précisément sur le mouvement des particules massives chargées à spin dans l'espace pseudo-riemannien, il

nous faut fixer une structure géométrique tangible de l'espace. Comme nous l'avions fait au paragraphe précédent §4.5, où nous avions analysé le mouvement de particules neutres à spin, nous supposerons ici que :

a) En raison de la faiblesse des interactions gravitationnelles à l'échelle des particules élémentaires, $\mathrm{w} \to 0$;
b) La rotation d'espace est stationnaire, et $\frac{{}^*\partial v_k}{\partial t} = 0$;
c) Il n'y a pas de déformations d'espace $D_{ik} = 0$;
d) La 3-métrique $g_{ik} dx^i dx^k$ est euclidienne $g_{ik} = \left| \begin{smallmatrix} -1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{smallmatrix} \right.$;
e) L'espace est en rotation constante à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe $x^3 = z$, donc les composantes de la vitesse linéaire correspondante, sont $v_1 = \Omega_{12} x^2 = \Omega y$, $v_2 = \Omega_{21} x^1 = -\Omega x$.

Considérant l'ensemble de ces contraintes, on obtient le ds^2 pour les particules élémentaires sous la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\Omega y \, dt \, dx + 2\Omega x \, dt \, dy - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (4.153)$$

tandis que les caractéristiques physiquement observables de l'espace de référence, dans cette métrique sont

$$F_i = 0\,, \quad D_{ik} = 0\,, \quad A_{12} = -A_{21} = -\,\Omega\,, \quad A_{23} = A_{31} = 0\,. \quad (4.154)$$

Comme nous l'avons fait au paragraphe §4.5, en examinant le mouvement des particules élémentaires à spin, nous admettons une vitesse linéaire de rotation d'espace très inférieure à la vitesse de la lumière (champ non holonome de l'espace très faible). Dans ce cas, le tenseur métrique chr.inv. h_{ik} est euclidien, et tous les symboles de Christoffel chr.inv. Δ^i_{jk} s'annulent, simplifiant notablement ici l'algèbre en question. Les équations chr.inv. du mouvement de la particule située dans notre Univers sont

$$\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) = -\frac{e}{c^2} E_i \frac{dx^i}{d\tau}\,, \qquad (4.155)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^1}{d\tau} + 2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Omega\,\mathrm{v}^2 = -e\left(E^1 + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{1km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\\
&\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^2}{d\tau} - 2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Omega\,\mathrm{v}^1 = -e\left(E^2 + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{2km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\\
&\frac{d\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^3}{d\tau} = -e\left(E^3 + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{3km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)
\end{aligned}\right\}, \qquad (4.156)$$

et celles de la particule de l'Univers miroir

$$\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) = \frac{e}{c^2} E_i \frac{dx^i}{d\tau}\,, \qquad (4.157)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\big(m+\frac{\eta}{c^2}\big)\mathrm{v}^1}{d\tau} &= -e\left(E^1 + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{1km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\\
\frac{d\big(m+\frac{\eta}{c^2}\big)\mathrm{v}^2}{d\tau} &= -e\left(E^2 + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{2km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)\\
\frac{d\big(m+\frac{\eta}{c^2}\big)\mathrm{v}^3}{d\tau} &= -e\left(E^3 + \frac{1}{c}\,\varepsilon^{3km}\mathrm{v}_k H_{*m}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{4.158}$$

Examinons attentivement l'équation scalaire chr.inv. du mouvement dans notre Univers (4.155), et celle de l'Univers miroir (4.157). On observe que la somme de la masse relativiste de la particule, et de sa masse de spin, est égale au travail fourni par la composante électrique du champ électromagnétique actif, pour déplacer cette particule chargée sur le parcours élémentaire dx^i. A partir des équations vectorielles du mouvement chr.inv., on voit que dans notre Univers (4.156), ainsi que dans l'Univers miroir (4.158), la somme du vecteur impulsion spatial de la particule, et de son vecteur impulsion de spin le long de $x^3 = z$, est définie uniquement par la composante de la force de Lorentz, suivant le même axe.

Notre tâche va maintenant consister à trouver la trajectoire d'une particule élémentaire à spin chargée, dans un champ électromagnétique sous les conditions annoncées.

Ainsi que nous l'avons fait au chapitre 3, nous supposons ici le champ constant, c'est-à-dire que les vecteurs champ électrique et magnétique E_i et H^{*i}, sont respectivement

$$E_i = \frac{\partial\varphi}{dx^i}\,, \tag{4.159}$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}H_{mn} = \frac{1}{2c}\,\varepsilon^{imn}\left[\frac{\partial\,(\varphi\mathrm{v}_m)}{dx^n} - \frac{\partial\,(\varphi\mathrm{v}_n)}{dx^m} - 2\varphi A_{mn}\right]. \tag{4.160}$$

Au chapitre 3, nous avons abordé le même genre de problème — résolvant les équations chr.inv. du mouvement pour une particule massive chargée, mais sans tenir compte de son spin. Manifestement, pour le cas d'une particule chargée sans spin, les solutions des équations chr.inv. du mouvement d'une particule à spin chargée devraient coïncider avec celles obtenues au chapitre 3, dans le cadre de l'électrodynamique théorique classique.

Afin de comparer nos résultats avec la théorie classique, it serait pertinent d'analyser le mouvement de la particule massive à spin pour trois cas typiques de champs électrodynamiques, qui ont fait l'objet d'une étude au chapitre 3, et dans la *Théorie des Champs* [10] :

a) Un champ électrique homogène et stationnaire (le vecteur champ magnétique est nul) ;
b) Un champ magnétique homogène et stationnaire (le vecteur champ électrique est nul) ;
c) Un champ électromagnétique homogène et stationnaire (les deux vecteurs sont non nuls).

Néanmoins, l'électrodynamique étudiant le mouvement des particules macroscopiques usuelles, il n'est pas évident que les 3 cas cités soient applicables à l'échelle microphysique, en raison des contraintes imposées par la métrique.

Tout d'abord, le spin d'une particule élémentaire perturbe son mouvement seulement si un champ extérieur de non holonomicité d'espace existe, et son tenseur représentatif qui est $A_{ik} \neq 0$. Par contre, à partir des formules pour les champs électrique et magnétique E_i et H^{*i} (4.159, 4160), on voit que l'espace non holonome ne perturbe que le champ magnétique.

C'est la raison pour laquelle nous prêtons une attention particulière au mouvement des particules élémentaires à spin dans un champ électromagnétique de nature strictement magnétique.

En second lieu, l'équation scalaire chr.inv. du mouvement d'une particule massive à spin chargée (4.155)

$$\left(m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}\right) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = -\frac{e}{c^2}\, E_i \mathrm{v}^i \tag{4.161}$$

devient à l'approximation non relativiste

$$E_i \mathrm{v}^i = 0\,, \tag{4.162}$$

et donc, la composante électrique du champ *ne fournit aucun travail* pour déplacer la particule dans le cadre des contraintes de la métrique imposées par l'échelle des particules élémentaires.

Puisque nous considérons ici des champs stationnaires, les conditions déduites (4.162), s'écrivent

$$E_i \mathrm{v}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\, \mathrm{v}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0\,, \tag{4.163}$$

qui impliquent pour le champ du potentiel scalaire $\varphi = conste$, ce qui conduit à

$$H^{*i} = \frac{\varphi}{2c}\, \varepsilon^{imn} \left[\frac{\partial \mathrm{v}_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial x^m} - 2\left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) \right]. \tag{4.164}$$

Dans le cas relativiste, la composante électrique se manifeste (elle fournit un travail pour déplacer la particule), à condition que la valeur absolue de la vitesse de la particule soit instationnaire

$$\frac{1}{2\,c^2\big(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\big)^{3/2}}\left(m_0+\frac{\eta_0}{c^2}\right)\frac{d\mathrm{v}^2}{d\tau}=-\frac{e}{c^2}\,E_i\mathrm{v}^i\neq 0\,. \tag{4.165}$$

Par suite, la composante électrique du champ électromagnétique actif selon les contraintes imposées par la métrique dans le domaine des particules élémentaires, ne se manifeste que pour les particules relativistes, dont la vitesse n'est pas constante le long de la trajectoire. Dans un champ strictement électrique, toutes les particules "lentes" ne sont donc pas concernées.

En définitive, le caractère général* de notre étude exige un champ électromagnétique stationnaire de *nature purement magnétique*, où le champ électrique est absent. Cette étude sera entreprise au §4.7.

§4.7 Mouvement dans un champ magnétique stationnaire

Dans ce paragraphe, nous allons examiner le mouvement d'une particule à spin chargée se déplaçant dans un champ électromagnétique stationnaire de nature strictement magnétique.

Comme nous l'avons fait au précédent paragraphe §4.6, nous supposerons que l'espace-temps a la métrique (4.153), d'où $F_i=0$, et $D_{ik}=0$. Le champ non holonome est stationnaire. Dans la rotation d'espace autour de z, de toutes les composantes du tenseur de non holonomicité, seules les composantes $A_{12}=-A_{21}=-\Omega=conste$, sont non nulles, et l'espace entre en rotation dans le plan $x\,y$ à la vitesse constante Ω.

Dans les conditions indiquées, la quantité $\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}$, qui décrit l'interaction entre le spin de la particule (sa rotation intrinsèque), avec un champ extérieur de l'espace non holonome, est

$$\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}=n\left(\hbar^{12}A_{12}+\hbar^{21}A_{21}\right)=-2n\hbar\Omega\,, \tag{4.166}$$

où le signe devant le produit $\hbar\,\Omega$ dépend seulement de l'orientation mutuelle de $\hbar$ et Ω. Le signe "plus" indique que $\hbar$ et Ω sont colinéaires de même sens, et le signe "moins" indique le sens inverse.

Dans ce cas†, les équations chr.inv. du mouvement de la particule de

*Mouvement d'une particule élémentaire à spin chargée animée d'une vitesse arbitraire, faible ou relativiste.

†A condition que le potentiel électromagnétique A^α soit dirigé le long de la trajectoire quadridimensionnelle de la particule.

notre Univers deviennent

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,, \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right]+2\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k+\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k&=\\ =-\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\,,&\end{aligned} \tag{4.168}$$

alors que pour la particule analogue située dans l'Univers miroir, on a

$$-\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,, \tag{4.169}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\mathrm{v}^i\right]+\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{c}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\,. \tag{4.170}$$

Après intégration du théorème des forces vives (l'équation scalaire chr.inv. du mouvement), on obtient l'intégrale des forces vives. Dans notre Univers et l'Univers miroir, celle-ci s'écrit respectivement

$$m+\frac{\eta}{c^2}=B=conste\,,\qquad m+\frac{\eta}{c^2}=-\widetilde{B}=conste\,, \tag{4.171}$$

où B et $\widetilde{B}$ sont les constantes d'intégration de notre Univers et de l'Univers miroir respectivement. Ces constantes peuvent s'obtenir à l'instant initial $\tau=0$ substituées dans (4.171). Il en résulte

$$B=m_0+\frac{\eta_0}{c^2}=m_0+\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{c^2}\,, \tag{4.172}$$

$$\widetilde{B}=-m_0-\frac{\eta_0}{c^2}=-m_0-\frac{n\hbar^{mn}A_{mn}}{c^2}\,. \tag{4.173}$$

Les formules pour les intégrales des forces vives, (4.171) impliquent qu'en l'absence de la composante électrique du champ électromagnétique actif, le carré de la vitesse de la particule à spin chargée demeure inchangé $\mathrm{v}^2=h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k=conste$.

Ayant substitué les formules des intégrales des forces vives dans (4.168, 4.170), on parvient aux équations vectorielles du mouvement chr.inv. pour notre Univers, et l'Univers miroir

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+2A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k+\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{cB}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\,, \tag{4.174}$$

$$\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau}+\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k=-\frac{e}{c\widetilde{B}}\,\varepsilon^{ikm}\mathrm{v}_kH_{*m}\,. \tag{4.175}$$

Celles-ci sont semblables aux équations chr.inv. du mouvement d'une macro particule chargée (particule chargée sans spin), dans un champ magnétique homogène et stationnaire (3.290, 3.291). À la différence ici, que la constante d'intégration relative à l'intégrale des forces vives présente au membre de droite, n'est pas égale à la masse relativiste m de la particule, comme c'était le cas en électrodynamique (3.290, 3.291), mais correspond à la formule (4.171), qui rend compte de l'interaction spin/champ de l'espace non holonome. Cette différence reste vraie pour les équations vectorielles chr.inv. (3.298, 3.299).

A l'attention de nos lecteurs qui s'intéressent de près à la méthode des invariants chronométriques, nous ferons une remarque concernant la forme des équations du mouvement chr.inv. Lorsque nous avons obtenu les composantes du terme $A_{k\cdot}^{\cdot i}\mathrm{v}^k$, trouvées seulement dans les équations de notre Univers, nous avons par exemple pour $i=1$

$$A_{k\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^k = A_{1\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^1 + A_{2\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^2 = h^{12}A_{12}\mathrm{v}^1 + h^{11}A_{21}\mathrm{v}^2, \tag{4.176}$$

où $A_{12}=-A_{21}=-\Omega$. Puis obtenant $A_{1\cdot}^{\cdot 1}$ et $A_{2\cdot}^{\cdot 1}$, on a

$$A_{1\cdot}^{\cdot 1} = h^{1m}A_{1m} = h^{11}A_{11} + h^{12}A_{12} = h^{12}A_{12}\,, \tag{4.177}$$

$$A_{2\cdot}^{\cdot 1} = h^{1m}A_{2m} = h^{11}A_{21} + h^{12}A_{22} = h^{11}A_{21}\,, \tag{4.178}$$

où les h^{ik} sont les éléments d'une matrice inverse de la matrice h_{ik}, et dont les composantes utiles s'écrivent

$$h^{11} = \frac{h_{22}}{h}\,, \qquad h^{12} = -\frac{h_{12}}{h}\,. \tag{4.179}$$

Par suite, le déterminant du tenseur métrique chr.inv. (voir §3.12, pour plus de détails), est

$$h = \det\|h_{ik}\| = 1 + \frac{\Omega^2\left(x^2+y^2\right)}{c^2}\,, \tag{4.180}$$

la quantité inconnue $A_{k\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^k$ (4.176) est donc (la composante $A_{k\cdot}^{\cdot 2}\mathrm{v}^k$ trouvée dans l'équation du mouvement suivant y, peut être déduite de la même manière)

$$A_{k\cdot}^{\cdot 1}\mathrm{v}^k = \frac{\Omega}{h}\left[\frac{\Omega^2}{c^2}\,xy\dot{x} + \left(1+\frac{\Omega^2x^2}{c^2}\right)\dot{y}\right]. \tag{4.181}$$

Revenons maintenant aux équations vectorielles chr.inv. du mouvement d'une particule à spin chargée dans un champ magnétique homogène et stationnaire. Nous aborderons ces équations dans deux cas

d'orientations mutuelles possibles du vecteur champ magnétique par rapport au pseudo-vecteur de non holonomicité d'espace : colinéaires et orthogonaux.

a) Le champ magnétique est colinéaire au champ non holonome

Nous supposons que le champ d'espace non honolome, le pseudo-vecteur de non holonomicité d'espace, est dirigé suivant z, et que ce champ est faible. Alors, les équations vectorielles chr.inv. du mouvement de la particule massive à spin chargée, située dans notre Univers s'écrivent

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = -\frac{eH}{cB}\,\dot{y}\,, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = -\frac{eH}{cB}\,\dot{x}\,, \quad \ddot{z} = 0\,, \tag{4.182}$$

alors que pour la particule analogue de l'Univers miroir, on a

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{y}\,, \quad \ddot{y} = -\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{x}\,, \quad \ddot{z} = 0\,. \tag{4.183}$$

Les équations diffèrent de celles d'une particule chargée sans spin soumises aux mêmes conditions (3.104, 3.305), par la présence de la constante d'intégration dans le membre de droite de l'intégrale des forces vives à la place de la masse relativiste, et qui décrit l'interaction du spin de la particule avec le champ d'espace non holonome.

Utilisant les solutions déjà écrites au §3.12, on peut obtenir immédiatement les formules pour les coordonnées de la particule à spin chargées de notre Univers

$$\begin{aligned} x = -\left[\,\dot{y}_{(0)}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau + \dot{x}_{(0)}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau\,\right]\frac{1}{2\Omega+\omega} + \\ + x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\,, \end{aligned} \tag{4.184}$$

$$\begin{aligned} y = \left[\,\dot{y}_{(0)}\sin(2\Omega+\omega)\,\tau - \dot{x}_{(0)}\cos(2\Omega+\omega)\,\tau\,\right]\frac{1}{2\Omega+\omega} + \\ + \; y_{(0)} - \frac{\dot{x}_{(0)}}{2\Omega+\omega}\,, \end{aligned} \tag{4.185}$$

et celles pour la particule de l'Univers miroir

$$x = -\frac{1}{\omega}\left[\,\dot{y}_{(0)}\cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau\,\right] + x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}\,, \tag{4.186}$$

$$y = \frac{1}{\omega}\left[\,\dot{y}_{(0)}\sin\omega\tau - \dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau\,\right] + y_{(0)} - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}\,, \tag{4.187}$$

qui diffèrent des solutions pour une particule chargée en électrodynamique, uniquement par le fait que la fréquence ω rend compte de l'interaction du spin de la particule avec le champ non holonome.

Dans notre Univers, les masses des particules sont positives, et ω est donné par

$$\omega = \frac{eH}{mc + \frac{\eta}{c}} = \frac{eH\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{m_0 c + \frac{\eta_0}{c}} = \frac{eH\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}}\,, \tag{4.188}$$

où le signe au dénominateur dépend de l'orientation mutuelle de $\hbar$ et Ω — le signe "moins" indique que $\hbar$ et Ω sont colinéaire et de même sens (leur produit scalaire est positif), alors que le signe "plus" implique leurs sens opposés, indépendamment du choix droit ou gauche des systèmes de référence.

Les masses des particules qui occupent l'Univers miroir, sont toujours négatives

$$m = -\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}} < 0\,, \tag{4.189}$$

et donc, dans cet Univers miroir, ω sera

$$\omega = \frac{eH}{mc + \frac{\eta}{c}} = \frac{eH\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{-m_0 c + \frac{\eta_0}{c}} = \frac{eH\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}{-m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}}\,. \tag{4.190}$$

Notons que les formules obtenues pour les coordonnées (4.184–4.187), tiennent déjà compte du fait que le carré de la vitesse de la particule demeure inchangé, à la fois dans notre Univers, et dans l'Univers miroir, c'est-à-dire sous les conditions respectives

$$\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_0}{2\Omega + \omega} = 0\,, \qquad \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_0}{\omega} = 0\,, \tag{4.191}$$

qui découlent directement de l'intégrale des forces vives (§3.12).

Pour la troisième équation du mouvement (suivant z), on a la solution

$$z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}\,. \tag{4.192}$$

Les formules déduites pour les coordonnées (4.184–4.187) révèlent qu'une particule à spin massive chargée plongée dans un champ magnétique homogène et stationnaire, parallèle à un champ d'espace non holonome très faible, effectue des *oscillations harmoniques* suivant x et y.

Dans notre Univers, la fréquence de ces oscillations est

$$\widetilde{\omega} = 2\Omega + \omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}} \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}\,, \tag{4.193}$$

tandis que dans l'Univers miroir, la particule analogue effectue des oscillations semblables à la fréquence ω trouvée en (4.190).

Lorsque le champ d'espace non holonome est faible, la quantité $n\hbar\Omega$ est de beaucoup inférieure à l'énergie $m_0 c^2$, car pour une grandeur très petite α, on sait que $\frac{1}{1\mp\alpha} \cong 1 \pm \alpha$, et par suite pour des vitesses suffisamment basses, on aura

$$\widetilde{\omega} \cong 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}\left(1 \pm \frac{2n\hbar\Omega}{m_0 c^2}\right). \tag{4.194}$$

Dans notre Univers, si à l'instant initial, le déplacement et la vitesse de notre particule satisfont aux conditions

$$x_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = 0\,, \qquad y_{(0)} - \frac{\dot{x}_0}{2\Omega + \omega} = 0\,. \tag{4.195}$$

Celle-ci voyagera comme une particule chargée sans spin, en décrivant un cercle* dans le plan $x\,y$

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{(2\Omega + \omega)^2}\,. \tag{4.196}$$

Mais dans ce cas, son rayon qui est

$$r = \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \frac{eH}{m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}} \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,, \tag{4.197}$$

dépendra de la valeur absolue du spin et de son orientation. Si la vitesse initiale d'une particule à spin chargée, dirigée suivant le champ magnétique (le long de z), n'est pas nulle, alors celle-ci se déplacera le long du champ magnétique en suivant une *hélice* de même rayon r.

Une particule analogue de l'Univers miroir, à condition que son déplacement et sa vitesse à l'instant initial satisfassent

$$x_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{\omega} = 0\,, \qquad y_{(0)} - \frac{\dot{x}_0}{\omega} = 0\,, \tag{4.198}$$

*Nous avons fixé l'axe y suivant l'impulsion inertielle de la particule, ce qui est toujours possible. De ce fait, toutes les formules relatives aux coordonnées décriront une particule de vitesse initiale nulle, suivant x.

se déplacera également en décrivant un cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}\,, \tag{4.199}$$

de rayon

$$r = \frac{\dot{y}_0}{\omega} = \frac{\dot{y}_0}{\dfrac{eH}{-m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,. \tag{4.200}$$

En général, lorsqu'aucune condition supplémentaire n'est imposée (4.195, 4.198), la trajectoire dans le plan xy, n'est pas circulaire.

Proposons-nous de trouver l'énergie et l'impulsion de la particule. En appliquant les formules dédiées aux intégrales des forces vives, on trouve la quantité η_0, qui est $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn} = n\,(\hbar^{12}A_{12} + \hbar^{21}A_{21}) = -2n\hbar\,\Omega$. Pour la particule située dans notre Univers

$$E_{\mathrm{tot}} = Bc^2 = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}} = conste\,, \tag{4.201}$$

et celle de l'Univers miroir

$$E_{\mathrm{tot}} = \widetilde{B}c^2 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}} = conste\,. \tag{4.202}$$

Dans ce paragraphe §4.7, nous avons supposé l'absence de la composante électrique du champ électromagnétique actif, et donc celui-ci ne contribue pas entièrement à l'énergie totale de la particule (la composante magnétique du champ ne fournit pas de travail pour déplacer les charges électriques).

A partir des formules obtenues (4.201, 4.202), on voit que l'énergie totale de la particule demeure inchangée le long de la trajectoire, alors que sa valeur numérique dépend de l'orientation mutuelle du moment intrinsèque $\hbar$, et de la vitesse angulaire de rotation d'espace Ω.

Cette dernière conclusion appelle quelques commentaires. Par définition, la quantité scalaire n (la valeur absolue du spin en unités $\hbar$), est toujours positive, alors que $\hbar$ et Ω sont les valeurs numériques des composantes des tenseurs antisymétriques h^{ik} et Ω_{ik}, qui prennent eux-mêmes des signes opposés suivant le caractère droit ou gauche des systèmes de référence. Cependant, comme nous considérons les produits de quantités, seules compte leur orientation mutuelle, qui est indépendante de notre choix, droit ou gauche, des systèmes de référence.

Si $\hbar$ et Ω son colinéaires et de même sens, alors l'énergie totale de la particule associée à notre Univers E_{tot} (4.201), sera la somme de son énergie relativiste $E = mc^2$, et de son "énergie de spin"

$$E_{\text{s}} = \frac{2n\hbar\Omega}{\sqrt{1 - \frac{\text{v}_{(0)}^2}{c^2}}} \,. \tag{4.203}$$

Si $\hbar$ et Ω sont de sens opposé, E_{tot} est égal à la différence entre l'énergie relativiste et l'énergie de spin. Cette orientation spécifique permet alors de découvrir un cas particulier, où $m_0 c^2 = 2n\hbar\Omega$, et l'énergie totale est donc nulle (ce cas sera évoqué au cours du prochain paragraphe §4.8, en analysant les champs propres aux particules élémentaires).

Pour les particules à spin chargées de masse négative, qui peuplent l'Univers miroir, la situation est différente. L'énergie totale E_{tot} (4.202) est négative, et par sa valeur absolue, est supérieure à celle de l'énergie relativiste $E = -mc^2$, à la condition que $\hbar$ et Ω soient dirigés en sens inverse. Nous aurons donc pour la 3-impulsion totale observable de la particule appartenant à notre Univers

$$p^i_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\text{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\text{v}^i = m\text{v}^i \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\text{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\text{v}^i, \tag{4.204}$$

c'est-à-dire, que c'est une somme algébrique de l'impulsion relativiste observable de la particule $p^i = m\text{v}^i$, et de l'impulsion de spin que cette particule reçoit de la part du champ non holonome. L'impulsion totale de la particule est plus grande que son impulsion relativiste, si $\hbar$ et Ω sont de même sens, et plus petite dans le cas inverse.

Dans le cas où $\hbar$ et Ω, ont une orientation mutuelle opposée, l'impulsion totale devient zéro (et avec elle l'énergie), si la condition $m_0 c^2 = 2n\hbar\Omega$ est vérifiée.

Pour la particule de l'Univers miroir, la quantité p^i_{tot} est

$$p^i_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\text{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\text{v}^i = -m\text{v}^i \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\text{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\text{v}^i, \tag{4.205}$$

donc la particule se déplace plus lentement si $\hbar$ et Ω sont colinéaires et de même sens, et plus rapidement dans le cas contraire.

Dans notre Univers, les composantes de la vitesse d'un particule à spin chargée dans le champ magnétique colinéaire et de même sens que

le champ d'espace non holonome, sont, avec les conditions (4.191),

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau - \dot{x}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{4.206}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau + \dot{x}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau\,. \tag{4.207}$$

Alors que pour la particule analogue dans l'Univers miroir, on aura

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin\omega\tau - \dot{x}_{(0)} \cos\omega\tau\,, \tag{4.208}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos\omega\tau + \dot{x}_{(0)} \sin\omega\tau\,. \tag{4.209}$$

Les composantes de l'impulsion totale de la particule dans notre Univers, sont donc

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{4.210}$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\,\tau\,, \tag{4.211}$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{z}_{(0)}\,, \tag{4.212}$$

où ω est comme en (4.188). Dans l'Univers miroir, on a

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \sin\omega\tau\,, \tag{4.213}$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} \cos\omega\tau\,, \tag{4.214}$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{z}_{(0)}\,. \tag{4.215}$$

b) Le champ magnétique est orthogonal au champ non holonome

Nous allons examiner ici le cas d'une particule à spin massive dans un champ magnétique orthogonal au champ d'espace non holonome. Le champ non holonome faible est dirigé suivant z, et le champ magnétique est lui, dirigé suivant y.

Les équations du mouvement chr.inv. sont donc similaires à celles de la particule chargée appartenant à notre Univers, dans les mêmes conditions (3.338)

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eH}{cB}\,\dot{z}\,, \qquad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -\frac{eH}{cB}\,\dot{x}\,. \tag{4.216}$$

La différence avec (3.338), est que le dénominateur au membre de droite contient à la place de la masse relativiste, la constante d'intégration de l'intégrale des forces vives, qui rend compte de l'interaction entre le spin de la particule et le champ non holonome de l'espace. Intégrant ces équations

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\cos\widetilde{\omega}\tau + x_{(0)} + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}^2}\,, \tag{4.217}$$

$$\begin{aligned} y = -\frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{y}_{(0)}\tau + \\ + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\tau + y_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}\,, \end{aligned} \tag{4.218}$$

$$\begin{aligned} z = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\left(\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\right) + \dot{z}_{(0)}\tau - \\ - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\tau + z_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}\,, \end{aligned} \tag{4.219}$$

on voit qu'elles sont différentes des solutions respectives pour une particule chargée sans spin, par le fait que la fréquence $\widetilde{\omega}$, dépend ici du spin et de son orientation mutuelle, avec le champ non holonome. Cette fréquence $\widetilde{\omega}$ s'exprime par

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2H^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}\right)^2}{\left(m_0c^2 \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}\right)^2}}\,. \tag{4.220}$$

Par voie de conséquence, une équation de la trajectoire d'une particule à spin chargée est donc semblable à celle de la particule sans spin.

Dans un cas particulier, c'est-à-dire sous certaines conditions initiales, l'équation de la trajectoire est celle d'une *sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\widetilde{\omega}^2}\,\dot{x}_{(0)}^2\,, \tag{4.221}$$

dont le rayon, contrairement à celui de la trajectoire de la particule sans spin, dépend de l'orientation de celle-ci par rapport au champ non holonome

$$r = \frac{1}{\sqrt{4\Omega^2 + \dfrac{e^2H^2\left(1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}\right)^2}{\left(m_0c^2 \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}\right)^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\,. \tag{4.222}$$

Examinons une particule analogue dans l'Univers miroir, qui se déplace dans un champ non holonome faible de l'espace, dirigé suivant y, et orthogonal au champ magnétique. Pour la particule, les équations vectorielles dynamiques chr.inv. sont

$$\ddot{x} = \frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{z}\,, \qquad \ddot{y} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -\frac{eH}{c\widetilde{B}}\,\dot{x}\,, \tag{4.223}$$

qui diffèrent donc des équations des particules de notre Univers, (4.216), par l'absence de termes contenant la vitesse angulaire de rotation d'espace Ω. Il s'ensuit que leurs solutions peuvent être obtenues à partir des solutions de notre Univers (4.217–4.219), en supposant $\widetilde{\omega} = \omega$. Par conséquent, une équation de la trajectoire d'une particule à spin chargée appartenant à l'Univers miroir s'écrit

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\omega^2}\,\dot{x}_{(0)}^2\,, \qquad r = \frac{-m_0c^2 \mp \dfrac{2n\hbar\Omega}{c}}{eH\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_{(0)}^2}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\,. \tag{4.224}$$

Dans ce cas, où le champ magnétique est orthogonal au champ non holonome, l'énergie totale de la particule est la même que pour des champs parallèles. Mais les formules des composantes de l'impulsion totale (4.201, 4.205) sont différentes, car elles incluent la vitesse de la particule qui dépend de l'orientation mutuelle du champ magnétique, et du champ non holonome. Dans le cas particulier où les champs sont orthogonaux entre eux, les composantes de la vitesse de la particule dans notre Univers (déduites des formules pour 4.217–4.219), sont

$$\dot{x} = \dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\widetilde{\omega}}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{4.225}$$

$$\dot{y} = \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau - \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau + \dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\,, \tag{4.226}$$

$$\dot{z} = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{\omega}{\widetilde{\omega}^2}\,\ddot{x}_{(0)}\,, \tag{4.227}$$

tandis que pour l'Univers miroir, on aura

$$\dot{x} = \dot{x}_{(0)}\cos\omega\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\omega}\sin\omega\tau\,, \tag{4.228}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)}\,, \tag{4.229}$$

$$\dot{z} = \frac{1}{\omega}\,\ddot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau - \dot{x}_{(0)}\sin\omega\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{1}{\omega}\,\ddot{x}_{(0)}\,. \tag{4.230}$$

Nous supposons maintenant que l'accélération initiale de la particule, et les constantes d'intégration sont nulles. Nous fixons également l'impulsion initiale de la particule suivant l'axe x. Dans les référentiels considérés, on obtient les composantes de l'impulsion totale de la particule de notre Univers

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{4.231}$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\frac{2\Omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{4.232}$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{m_0c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{4.233}$$

et pour la particule analogue dans l'Univers miroir

$$p^1_{\text{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\cos\widetilde{\omega}\tau\,, \tag{4.234}$$

$$p^2_{\text{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{y}_{(0)} = 0\,, \tag{4.235}$$

$$p^3_{\text{tot}} = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\,\Omega}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c^2}}}\,\dot{x}_{(0)}\sin\widetilde{\omega}\tau\,. \tag{4.236}$$

Comme il est aisé de voir, les solutions obtenues peuvent être transformées dans leurs homologues électrodynamiques (§3.12), en faisant $\hbar \to 0$.

§ 4.8 Loi de quantification pour les masses des particules élémentaires

Dans un champ électromagnétique, nous avons déjà obtenu les équations chr.inv. du mouvement d'une particule à spin chargée dans notre Univers et l'Univers miroir

$$\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) = -\frac{e}{c^2}\, E_i \mathrm{v}^i, \quad -\frac{d}{d\tau}\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) = -\frac{e}{c^2}\, E_i \mathrm{v}^i. \tag{4.237}$$

Ces équations sont facilement intégrables et conduisent aux intégrales des forces vives

$$m + \frac{\eta}{c^2} = B\,, \qquad -\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) = \widetilde{B}\,, \tag{4.238}$$

où B est la constante d'intégration de notre Univers, et $\widetilde{B}$ est la constante d'intégration de l'Univers miroir. Ces constantes dépendant seulement des conditions initiales, cherchons à déterminer la forme de ces dernières qui conduise à l'annulation de ces constantes. Pour des particules à spin chargées appartenant à notre Univers et à l'Univers miroir (4.238), on obtient respectivement

$$m + \frac{\eta}{c^2} = 0\,, \qquad -\left(m + \frac{\eta}{c^2}\right) = 0\,. \tag{4.239}$$

On observe que les membres de droite des équations vectorielles du mouvement chr.inv. (4.150, 4.152) qui contiennent la force de Lorentz chr.inv., s'annulent également. Autrement dit, lorsque les constantes d'intégration dans les équations scalaires chr.inv., sont nulles, le champ électromagnétique actif ne fournit aucun travail pour déplacer les particules.

Pour une particule de masse au repos non nulle dans (4.239), il est toujours possible d'annuler l'expression relativiste dans (4.239), et ce faisant, nous pouvons écrire ces formules au moyen d'une notation où la vitesse de la particule n'apparaît pas. Pour les particules massives appartenant à notre Univers, on aura

$$m_0 c^2 = -n\hbar^{mn} A_{mn}\,, \tag{4.240}$$

et pour une particule sans masse de l'Univers miroir

$$m_0 c^2 = n\hbar^{mn} A_{mn}\,. \tag{4.241}$$

Les formules (4.240) et (4.241) vont constituer ici la *loi de quantification pour les masses des particules élémentaires* :

> La masse au repos de toute particule à spin massive, est proportionnelle à l'énergie de l'interaction entre son spin et le champ de l'espace non holonome, avec un signe opposé.

Ou bien formulé différemment :

> La masse au repos de toute particule à spin massive, est égale à l'énergie d'interaction entre son spin et le champ de l'espace non holonome, avec un signe opposé.

Puisque dans l'Univers miroir, l'énergie de chaque particule est négative, le signe "plus" du membre de droite de (4.241), traduit l'énergie d'interaction de signe opposé, qui se manifeste dans l'Univers miroir. De la même façon, le signe "moins" dans (4.240), se rapporte ici à notre Univers.

Notons de même, que ces formules de nature quantique, ne s'appliquent pas aux particules sans spin.

Evaluons maintenant les formules déduites en considérant une particule élémentaire pour laquelle on cherchera à obtenir les valeurs numériques de la quantité* $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$. Nous formulerons le tenseur des vitesses angulaires de rotation d'espace A_{mn}, à l'aide du pseudo-vecteur $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{imn}A_{mn}$

$$\Omega^{*i}\varepsilon_{imn} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ipq}\varepsilon_{imn}A_{pq} = \frac{1}{2}\left(\delta^p_m\delta^q_n - \delta^p_n\delta^q_m\right)A_{pq} = A_{mn}\,. \tag{4.242}$$

On trouve : $A_{mn} = \varepsilon_{imn}\Omega^{*i}$. Comme

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{imn}\hbar^{mn} = \hbar_{*i} \tag{4.243}$$

est le pseudo-vecteur de Planck, la quantité $\eta_0 = n\hbar^{mn}\varepsilon_{imn}\Omega^{*i}$ s'écrit

$$\eta_0 = 2n\hbar_{*i}\Omega^{*i}. \tag{4.244}$$

C'est-à-dire que c'est le double produit scalaire du — 3-pseudo-vecteur de Planck avec le pseudo-vecteur tridimensionnel des vitesses angulaires de rotation d'espace, multiplié par le nombre quantique de spin de la particule. Si $\hbar_{*i}$ et Ω^{*i} sont colinéaires, et de même sens, le cosinus est positif, et donc

$$\eta_0 = 2n\hbar_{*i}\Omega^{*i} = 2n\hbar\,\Omega\cos\left(\vec{\hbar}\,;\vec{\Omega}\right) > 0\,. \tag{4.245}$$

---

*Cette quantité caractérise l'énergie d'interaction entre le spin de la partcule, et le champ d'espace non holonome : l'énergie de spin.

Pour le sens inverse, on aura

$$\eta_0 = 2n\hbar_{*i}\Omega^{*i} = 2n\hbar\,\Omega\cos\left(\vec{\hbar}\,;\vec{\Omega}\right) < 0\,. \tag{4.246}$$

Par conséquent, pour chaque particule élémentaire située dans notre Univers, la constante d'intégration relative à l'intégrale des forces vives, devient nulle, à condition que les pseudo-vecteurs $\hbar_{*i}$ et Ω^{*i} soient dirigés en sens inverse. Dans l'Univers miroir, pour les particules élémentaires massives, la constante d'intégration s'annule si les pseudo-vecteurs $\hbar_{*i}$ et Ω^{*i} sont colinéaires et de même sens.

Si l'énergie d'interaction entre la particule élémentaire massive et le champ d'espace non holonome est égale à son énergie au repos $E = m_0 c^2$, on voit que l'impulsion de la particule ne se manifeste ni dans notre Univers, ni dans l'Univers miroir.

Supposons maintenant que l'axe z soit colinéaire au pseudo-vecteur des vitesses angulaires de rotation d'espace Ω^{*i}. Alors, des 3 composantes de Ω^{*i}, la seule composante non nulle est

$$\Omega^{*3} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{3mn}A_{mn} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{312}A_{12} + \varepsilon^{321}A_{21}\right) = \varepsilon^{312}A_{12} = \frac{e^{312}}{\sqrt{h}}A_{12}\,. \tag{4.247}$$

Afin de simplifier le calcul, nous supposerons en outre, que la 3-métrique spatiale est euclidienne, et que l'espace est soumis à une rotation constante Ω. Dans ce cas, les composantes de la vitesse linéaire de la 4 rotation d'espace, sont $v_1 = \Omega x$, $v_2 = -\Omega y$ et $A_{12} = -\Omega$ d'où

$$\Omega^{*3} = \frac{e^{312}}{\sqrt{h}}A_{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{h}} = -\frac{\Omega}{\sqrt{h}}\,. \tag{4.248}$$

La racine carrée du déterminant du tenseur métrique chr.inv., définie en (4.180), est

$$\sqrt{h} = \sqrt{\det\|h_{ik}\|} = \sqrt{1 + \frac{\Omega^2\left(x^2 + y^2\right)}{c^2}}\,. \tag{4.249}$$

La dimension des coordonnées mise en jeu ici, est à l'échelle des particules élémentaires, et donc on peut admettre $\sqrt{h} \approx 1$, et selon (4.248), $\Omega^{*3} = -\Omega = conste$. Pour notre Univers et l'Univers miroir, la loi de quantification pour les masses des particules élémentaires (4.240) s'écrit respectivement

$$m_0 = \frac{2n\hbar\Omega}{c^2}\,, \qquad m_0 = -\frac{2n\hbar\Omega}{c^2}\,. \tag{4.250}$$

Donc, pour toute particule élémentaire massive située dans notre Univers, on trouve la relation fondamentale entre sa masse au repos

m_0, et la vitesse angulaire de rotation d'espace Ω

$$\Omega = \frac{m_0 c^2}{2n\hbar} \,. \tag{4.251}$$

Il s'ensuit que la masse propre (masse réelle) d'un objet observable, dans les conditions usuelles, est indépendante des propriétés de l'espace de référence de l'observateur ; par contre, pour les particules élémentaires, cette même masse dépend formellement de ces propriétés, et plus particulièrement de la vitesse angulaire de rotation d'espace.

A partir, de la loi de quantification, il est possible de calculer les fréquences de rotation de l'espace de l'observateur, qui correspondent aux masses au repos des particules élémentaires de notre Univers.

Pour les particules actuellement recensées, les résultats sont rassemblés dans le tableau 4.1.

Ces données montrent clairement que pour les particules élémentaires, l'espace de l'observateur est toujours non holonome. Par exemple, l'observation effectuée sur un électron ($r_e = 2.8 \times 10^{-13}$ cm), fournit la valeur de la vitesse linéaire de rotation de l'espace de l'observateur $v = \Omega r = 2200$ km/s.* Etant donné que d'autres particules élémentaires sont plus petites, cette vitesse semble constituer une limite supérieure†.

Qu'avons-nous appris ? En général, l'observateur compare les résultats de ses mesures, au moyen d'instruments spécifiques attachés à son corps physique de référence. Mais l'observateur et son corps ne sont pas liés à l'objet observé, qui n'est pas perturbé par les observations. Par suite, dans l'univers macroscopique, il n'existe pas de dépendance entre les propriétés réelles des corps observés (masse au repos, énergie de repos, etc.), et les propriétés des corps de référence, ainsi que de son espace de référence — les propriétés de ces objets ne sont pas reliées entre elles.

En d'autres termes, même si les images observées sont déformées sous l'influence des caractéristiques physiques de l'observateur, à l'échelle macroscopique, l'observateur lui-même et son corps de référence

*Cette valeur de v est égale à la vitesse de d'un électron, dans la 1ère orbite de Bohr, bien que la vitesse de rotation d'espace déduite (voir tableau 4.1), ne se rapport ici, qu'à un électron libre (non soumis à la quantification orbitale par rapport au noyau d'un atome d'hydrogène). Cette circonstance provient d'une origine "génétique" inhérente à la non holonomicité quantique de l'espace, qui ne définit pas seulement les masses, mais qui semble être la cause même de la rotation des électrons dans les atomes.

†Il est intéressant de constater que les vitesses angulaires de rotation d'espace, relatives aux baryons (voir tableau 4.1), coïncident à un ordre de grandeur près, avec la fréquence $\sim 10^{23}$ s^{-1}, caractérisant les particules élémentaires en tant qu'oscillateurs [27, 28].

Particules élémentaires	Masse au repos	Spin	Ω, sec^{-1}
LEPTONS			
électron e^-, positron e^+	1	1/2	7.782×10^{20}
neutrino électronique ν_e et anti-neutrino électronique $\tilde{\nu}_e$	$<4\times10^{-4}$	1/2	$<3\times10^{17}$
neutrino μ-mésonique ν_μ et anti-neutrino μ-mésonique $\tilde{\nu}_\mu$	<8	1/2	$<6\times10^{21}$
μ^--méson, μ^+-méson	206.766	1/2	1.609×10^{23}
BARYONS			
nucléons			
proton p, anti-proton $\tilde{p}$	1836.09	1/2	1.429×10^{24}
neutron n, anti-neutron $\tilde{n}$	1838.63	1/2	1.431×10^{24}
hypérons			
Λ^0-hypéron, anti-Λ^0-hypéron	2182.75	1/2	1.699×10^{24}
Σ^+-hypéron, anti-Σ^+-hypéron	2327.6	1/2	1.811×10^{24}
Σ^--hypéron, anti-Σ^--hypéron	2342.6	1/2	1.823×10^{24}
Σ^0-hypéron, anti-Σ^0-hypéron	2333.4	1/2	1.816×10^{24}
Ξ^--hypéron, anti-Ξ^--hypéron	2584.7	1/2	2.011×10^{24}
Ξ^0-hypéron, anti-Ξ^0-hypéron	2572	1/2	2.00×10^{24}
Ω^--hypéron, anti-Ω^--hypéron	3278	3/2	8.50×10^{23}

Tableau 4.1 – Fréquences des rotations de l'espace de référence de l'observateur qui correspondent aux particules élémentaires massives.

ne perturbe jamais les objets.

L'univers des particules élémentaires présente néanmoins une différence notable. Dans ce paragraphe, nous avons vu que dès lors que l'on atteint l'échelle de grandeur de ces particules, où le spin (propriété quantique des particule) perturbe substantiellement le mouvement, les propriétés physiques du corps de référence (l'espace de référence), et celles des particules deviennent intimement liées, donc le corps de référence *perturbe* les particules observées. L'observateur ne compare plus alors les propriétés des particules avec celles des ses propres références, mais cet observateur interfère directement avec les particules observées.

Il est toutefois possible de formuler ces conclusions d'une manière différente. En examinant les effets engendrés dans l'univers des particules élémentaires, il *n'existe pas de frontière* entre l'observateur (son corps physique de référence) et la particule observée. Nous avons donc ici la possibilité de définir une relation entre le champ non holonome d'espace lié à l'observateur, et les masses au repos des particules —

objets qui ne sont pas reliés au corps de référence dans l'univers macroscopique. La loi pour la quantification des masses déduite ici, ne s'applique donc qu'aux particules élémentaires.

Notons pour conclure, que les résultats exposés ici ont été exclusivement déduits à partir de considérations purement géométriques de la relativité générale, sans faire appel à la mécanique quantique. Ces résultats pourront peut être permettre de constituer un pont entre les deux théories.

§ 4.9 Longueur d'onde de Compton

Nous avons donc obtenu les résultats suivants : en observant une particule élémentaire de masse au repos m_0, la fréquence de rotation de l'espace est $\Omega = \frac{m_0 c^2}{2n\hbar}$ (4.251). Nous nous proposons de trouver la longueur d'onde qui correspond à cette fréquence. En supposant que l'onde de l'espace non holonome se propage à la vitesse de la lumière $\lambda\Omega = c$, on a

$$\lambda = \frac{c}{\Omega} = 2n\frac{\hbar}{m_0 c}\,. \tag{4.252}$$

En d'autres termes, lorsque nous observons une particule massive de spin $n = \frac{1}{2}$, la longueur de l'onde de l'espace non holonome, est égale à la longueur d'onde de Compton de cette particule $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{c}} = \frac{\hbar}{m_0 c}$.

Que signifie cette proposition ? L'effet Compton ainsi appelé du nom de Compton qui l'a découvert en 1922, résulte de la "diffraction" d'un photon par un électron libre, qui abaisse sa fréquence propre selon

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_{\mathrm{e}} c}\,(1 - \cos\vartheta) = \lambda_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}}\,(1 - \cos\vartheta)\,, \tag{4.253}$$

où λ_1 et λ_2, sont les longueurs d'onde du photon, avant et après le processus, ϑ étant l'angle de la diffraction. Le multiplicateur $\lambda_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}}$ ec propre à l'électron, fût d'abord appelé *longueur d'onde de Compton de l'électron*. Plus tard, on s'aperçut que d'autres particules élémentaires soumises à la diffraction photonique, révélaient les longueurs d'onde spécifiques $\lambda_{\mathrm{c}} = \frac{h}{m_0 c}$, ou $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{c}} = \frac{\hbar}{m_0 c}$, confirmant que chaque type de particules élémentaires (électrons, protons, neutrons, etc.) possède sa propre longueur d'onde de Compton. Le sens physique profond de la signification de ces quantités sera dégagé ultérieurement. Pour des régions de dimension inférieure à $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{c}}$, chaque particule élémentaire ne peut plus être assimilée à un objet ponctuel, et son interaction avec d'autres particules (et avec l'observateur), doit faire appel aux principes de la mécanique quantique. La région dont l'ordre de grandeur est $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{c}}$, est parfois interprétée comme caractérisant la dimension de la particule élémentaire.

Partant de cette interprétation dans le cadre de notre théorie, l'observation d'une particule élémentaire massive exige une rotation d'espace de l'observateur d'autant plus rapide, que la vitesse angulaire de sa rotation produise une longueur d'onde spécifique égale à la longueur d'onde Compton de la particule observée, c'est-à-dire à l'échelle où cette dernière n'est plus ponctuelle. En d'autres termes, c'est la vitesse angulaire de la rotation d'espace (longueur d'onde dans le champ non holonome), qui définit la longueur d'onde observable de Compton (la dimension propre) de la particule.

§ 4.10 Particules en rotation dépourvues de masse

Les particules sans masse sont dépourvues de charge électrique, et leurs équations dynamiques chr.inv. exprimées dans notre Univers ainsi que dans l'Univers miroir, sont respectivement

$$\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,, \qquad -\frac{d}{d\tau}\left(m+\frac{\eta}{c^2}\right)=0\,. \tag{4.254}$$

Par suite, pour les particules sans masse associées à notre Univers, et celles appartenant à l'Univers miroir, on aura respectivement

$$mc^2=-\,\eta\,, \qquad mc^2=\eta\,. \tag{4.255}$$

Manifestement, le qualificatif de "masse au repos" ne peut plus s'appliquer à ce type de particule qui, par définition se déplace constamment. Leurs masses relativistes sont définies à partir de l'équivalent "énergie" $E=mc^2$, mesurée en électron volt. Il en découle que les particules sans masse sont dépourvues d'énergie de spin au repos $\eta_0=n\hbar^{mn}A_{mn}$.

Néanmoins, le tenseur de Planck déduit de l'énergie de spin η, permet de quantifier les masses relativistes de ce type de particule, ainsi que les vitesses angulaires de rotation d'espace. Déterminer ces mêmes vitesses angulaires dans le cas de particules sans masse, implique de trouver une formule étendue, relative à leur énergie se spin relativiste η, sans faire intervenir la racine carrée du facteur relativiste.

En mécanique quantique, il est fait référence à l'état "d'Hélicité" des particules sans masse, c'est-à-dire, à la projection du spin sur la direction de leurs impulsions. L'introduction de la notion d'hélicité se justifie par le fait que les particules sans masse qui se déplacent à la vitesse de la lumière, ne sont jamais au repos par rapport à un système d'observateur quelconque. Il est donc toujours loisible de supposer que le spin d'une particule sans masse "tangente" sa trajectoire du genre lumière (colinéaire ou colinéaire inverse à cette trajectoire).

Sachant que le nombre quantique de spin n d'une particule sans masse est 1, nous poserons

$$\eta = \hbar^{mn} \tilde{A}_{mn} \,, \tag{4.256}$$

où $\tilde{A}_{mn}$ représente le tenseur des vitesses angulaires chr.inv. de rotation d'espace (espace du genre lumière).

On obtiendra donc l'énergie du spin relativiste d'une particule sans masse (4.256), en déterminant le tenseur des vitesses angulaires de rotation d'espace du genre lumière.

A cet effet, nous allons construire un tenseur semblable au 4-tenseur de rotation d'espace $A^{\alpha\beta}$ (4.11), qui puisse décrire la rotation spatiale d'un référentiel se déplaçant à une vitesse arbitraire par rapport à un observateur (qui ne soit pas un référentiel d'accompagnement). Il vient ainsi

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, c\tilde{h}^{\alpha\mu}\tilde{h}^{\beta\mu}\tilde{a}_{\mu\nu} \,, \qquad \tilde{a}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{b}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \tilde{b}_\mu}{\partial x^\nu} \,, \tag{4.257}$$

où $\tilde{b}^\alpha$ est le 4-vecteur vitesse d'un référentiel du genre lumière, par rapport à l'observateur, et

$$\tilde{h}^{\alpha\mu} = -\, g^{\alpha\mu} + \tilde{b}^\alpha \tilde{b}^\mu \tag{4.258}$$

est la généralisation quadridimensionnelle du tenseur métrique chr.inv. de l'espace du genre lumière et de son repère associé.

L'espace occupé par les particules sans masse, est un domaine spatio-temporel qui correspond au cône (isotrope) du genre lumière défini par l'équation $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = 0$. Ce cône existe en chaque point de l'espace pseudo-riemannien dont la signature est $(+---)$.

Le 4-vecteur vitesse du référentiel du genre lumière qui est associé à la particule sans masse est

$$\tilde{b}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{dx^\alpha}{c d\tau} \,, \qquad \tilde{b}_\alpha \tilde{b}^\alpha = 0 \,, \tag{4.259}$$

et donc, ses projections chr.inv. dans le référentiel d'un observateur subluminique, s'écrivent

$$\frac{\tilde{b}_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm 1, \qquad \tilde{b}^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{c}\, c^i, \tag{4.260}$$

tandis que les autres composantes de ce vecteur isotrope (4.259), seront

$$\tilde{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(\frac{1}{c^2}\, v_i c^i \pm 1\right), \qquad \tilde{b}_i = -\frac{1}{c}\,(c_i \pm v_i) \,, \tag{4.261}$$

où c^i est le vecteur chr.inv. de la vitesse de la lumière.

Examinons maintenant en détails les propriétés des particules sans masse du genre lumière. Sous forme chr.inv., la condition d'isotropie pour la 4 vitesse des particules $b_\alpha b^\alpha = 0$, devient

$$h_{ik}\, c^i c^k = c^2 = conste, \tag{4.262}$$

où h_{ik} est le tenseur métrique chr.inv. relatif à un espace de référence d'un observateur subluminique.

Les composantes du 4-tenseur métrique du genre temps $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ (4.258), dont les composantes tridimensionnelles forment le tenseur métrique chr.inv. du genre lumière $\tilde{h}^{ik}$, s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \tilde{h}^{00} &= \frac{v_k v^k \pm 2 v_k c^k + \frac{1}{c^2}\, v_k v_n c^k c^n}{c^2\big(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\big)^2} \\ \tilde{h}^{0i} &= \frac{v^i \pm c^i + \frac{1}{c^2}\, v_k c^k c^i}{c\big(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\big)}\,, \qquad \tilde{h}^{ik} = h^{ik} + \frac{1}{c^2}\, c^i c^k \end{aligned}\right\}. \tag{4.263}$$

Ici, le signe "plus" indique le sens direct de l'écoulement du temps dans l'espace du genre lumière, (notre Univers), et le signe "moins" indique le sens rétrograde du temps (Univers miroir).

Nous devons maintenant déduire les composantes du rotationnel de la 4-vitesse des particules sans masse, qui a été trouvée dans la formule (4.257). Après calculs, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_{00} = 0\,, \quad \tilde{a}_{0i} = \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\pm F_i - \frac{{}^*\partial c_i}{\partial t}\right) \\ &\tilde{a}_{ik} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \frac{\partial c_k}{\partial x^i}\right) \pm \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{4.264}$$

D'une façon générale, pour définir l'énergie de spin d'une particule dépourvue de masse (4.256), nous aurons besoin des composantes covariantes spatiales du tenseur de sa rotation d'espace, à savoir les composantes covariantes $\tilde{A}_{ik}$.

Pour ce faire, nous prendrons les composantes contravariantes $\tilde{A}^{ik}$, puis nous abaisserons leurs indices, comme pour toute quantité chr.inv., en employant le tenseur métrique chr.inv. du système de référence de l'observateur.

Substituant dans

$$\tilde{A}^{ik} = c\Big(\tilde{h}^{i0}\tilde{h}^{k0}\,\tilde{a}_{00} + \tilde{h}^{i0}\tilde{h}^{km}\,\tilde{a}_{0m} + \tilde{h}^{im}\tilde{h}^{k0}\,\tilde{a}_{m0} + \tilde{h}^{im}\tilde{h}^{kn}\,\tilde{a}_{mn}\Big) \tag{4.265}$$

les composantes obtenues $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ et $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, on parvient finalement à

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{ik} = h^{im}h^{kn}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_n c_m - F_m c_n\right)\right] \pm \\ \pm\, h^{im}h^{kn}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_n v_m - F_m v_n\right)\right] + \\ + \left(\frac{1}{c^2}\, v_n c^n \pm 1\right)\left(c^k h^{im} - c^i h^{km}\right)\frac{{}^*\partial c_m}{\partial t} - \\ - \left(v^k h^{im} - v^i h^{km}\right)\frac{{}^*\partial c_m}{\partial t} + \frac{1}{2c^2}\, c^m\left(c^i h^{kn} - c^k h^{in}\right) \times \\ \times\left[\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right) \pm \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.266}$$

Par définition, la quantité $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_n v_m - F_m v_n\right)$ dans cette formule, est le tenseur chr.inv. des vitesses angulaires des rotations de l'espace de l'observateur A_{mn}, qui est en même temps le tenseur de non holonomicité de *l'espace non isotrope**.

Par sa structure, le tenseur $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_n c_m - F_m c_n\right)$ est semblable au tenseur A_{mn}, avec toutefois les composantes covariantes du vecteur chr.inv. de la vitesse de la lumière $c_m = h_{mn}c^n$, à la place de la vitesse linéaire de rotation d'espace non isotrope v_i. Le vecteur c^n est une quantité physiquement observable, car il s'obtient en abaissant les indices dans le vecteur chr.inv. à l'aide du tenseur métrique chr.inv. h_{mn}. Ce dernier tenseur sera noté $\breve{A}_{mn}$, où le symbole $\breve{}$, indique que cette quantité appartient à *l'espace isotrope*† où l'écoulement du temps est direct — la partie supérieure du cône de lumière s'arrondit dans l'espace-temps pourvu d'une torsion. On trouve en définitive

$$\breve{A}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2\,c^2}\left(F_n c_m - F_m c_n\right). \tag{4.267}$$

*Un espace non isotrope est un domaine spatio-temporel quadridimensionnel dans lequel existent les particules de masses au repos non nulles. Les lignes d'univers de ce domaine satisfont $ds \neq 0$. Par voie de conséquence, si l'intervalle ds est réel, les particules se déplacent à une vitesse subluminique (particules usuelles) ; si l'intervalle est imaginaire, les particules sont supraluminiques (tachyons). Donc par définition, l'espace commun au deux types de particules est non isotrope.

†Un *espace isotrope*, est un domaine spatio-temporel quadridimensionnel occupé par des particules dépourvues de masse (du genre lumière). Ce domaine peut être aussi appelé membrane de lumière. Géométriquement, cette *membrane de lumière* peut être considérée comme la surface du cône isotrope, c'est-à-dire l'ensemble de ses éléments quadridimensionnels (lignes d'univers de propagation de la lumière).

Dans le cas particulier, où le potentiel de gravitation est négligeable (quand $\mathrm{w} \approx 0$), le tenseur devient

$$\breve{A}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m}\right). \tag{4.268}$$

C'est-à-dire que c'est le rotationnel chr.inv. de la vitesse de la lumière, c'est pourquoi, nous appellerons $\breve{A}_{mn}$ le *rotationnel d'espace isotrope.*

On peut illustrer ce rotationnel par un exemple géométrique. La condition nécessaire et suffisante pour que soit vérifié $A_{mn} = 0$, (condition d'espace holonome) équivaut comme on l'a vu, à l'annulation de toutes les composantes $v_i = -c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$, c'est-à-dire à l'absence de rotation d'espace. Le tenseur $\breve{A}_{mn}$ est seulement défini dans l'espace isotrope occupé par des particules dépourvues de masse, car à "l'intérieur" du cône de lumière, se déplacent les particules subluminiques, et à "l'extérieur", se trouvent les tachyons.

Notre propos concerne ici les particules dépourvues de masse (photons). A partir de (4.268), on voit que le caractère non holonome de l'espace isotrope est lié à la nature du rotationnel de la vitesse linéaire c_m des particules sans masse. On en conclut que tout photon est un rotationnel spatial de l'espace isotrope, tandis que le spin du photon découle lui, de l'interaction de son champ rotationnel interne avec le champ tensoriel extérieur $\breve{A}_{mn}$.

Pour illustrer cette conclusion, nous allons définir les régions dans lesquelles évoluent les différents types de particules. Notons tout d'abord que le cône de lumière existe en chaque point de l'espace. Son équation $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = 0$ est en notations chr.inv.

$$c^2\tau^2 - h_{ik}\,x^i x^k = 0\,, \qquad h_{ik}\,x^i x^k = \sigma^2. \tag{4.269}$$

Dans le diagramme de Minkowski, "l'intérieur" du cône de lumière est empli par l'espace non isotrope, où sont situées les particules subluminiques. A l'extérieur, existe également une région non isotrope de l'espace occupée par des particules supraluminiques (tachyons). L'espace spécifique des particules sans masse est une *membrane d'espace-temps*, séparant ces deux régions non isotropes. L'image est ainsi symétrique par rapport à un miroir : dans la partie supérieure du cône, existe l'espace subluminique avec écoulement du temps direct (notre Univers), séparé de la section spatiale de l'observateur lié à la partie inférieure — l'espace subluminique avec écoulement du temps inverse (Univers miroir). En d'autres termes, la partie supérieure est peuplée par les particules réelles avec des masses et des énergies positives, tandis que la

partie inférieure est occupée par leurs "homologues" miroir, et dont les masses et les énergies sont négatives (de notre point de vue).

Par conséquent, la rotation de l'espace subluminique non isotrope à "l'intérieur" du cône, implique l'existence de la membrane de lumière qui l'enveloppe (espace isotrope). Il en résulte que le cône de lumière entreprend une rotation décrite par le tenseur $\breve{A}_{mn}$ — le rotationnel d'espace isotrope. Bien entendu, il est toujours loisible d'envisager un déroulement des évènements inverse, où la rotation du cône de lumière implique "le contenu" de sa partie intérieure. Cependant, du fait que les particules à "l'intérieur" du cône, possèdent des masses au repos non nulles, elles sont plus "lourdes" que les particules sans masse de la membrane de lumière. Par suite, le "contenu" intérieur du cône de lumière est aussi un milieu inertiel.

Revenons maintenant à la formule de l'énergie de spin relativiste d'une particule sans masse $\eta = \hbar^{mn}\tilde{A}_{mn}$ (4.256). En abaissant les indices dans le tenseur de non holonomicité d'espace isotrope $\tilde{A}^{ik}$ (4.266), on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{ik} = \pm A_{ik} + \breve{A}_{ik} + \frac{1}{2c^2}c^m\Bigg\{c_i\left[\frac{\partial\,(c_m \pm v_m)}{\partial x^k} - \frac{\partial\,(c_k \pm v_k)}{\partial x^m}\right] - \\ - c_k\left[\frac{\partial\,(c_m \pm v_m)}{\partial x^i} - \frac{\partial\,(c_i \pm v_i)}{\partial x^m}\right]\Bigg\} + \left(v_i\frac{{}^*\partial c_k}{\partial t} - v_k\frac{{}^*\partial c_i}{\partial t}\right) + \\ + \left(\frac{1}{c^2}v_n v^n \pm 1\right)\left(c_k\frac{{}^*\partial c_i}{\partial t} - c_i\frac{{}^*\partial c_k}{\partial t}\right).\end{aligned} \tag{4.270}$$

En contractant $\tilde{A}_{ik}$ avec le tenseur de Planck $\hbar^{ik}$, il vient

$$\begin{aligned}\eta = \eta_0 + n\hbar^{ik}\breve{A}_{ik} + \left[\left(\frac{1}{c^2}v_n v^n \pm 1\right)\left(c_k\frac{{}^*\partial c_i}{\partial t} - c_i\frac{{}^*\partial c_k}{\partial t}\right) + \right. \\ \left. + \left(v_i\frac{{}^*\partial c_k}{\partial t} - v_k\frac{{}^*\partial c_i}{\partial t}\right)\right]n\hbar^{ik} + \frac{1}{2c^2}n\hbar^{ik}c^m\Bigg\{c_i\left[\frac{\partial\,(c_m \pm v_m)}{\partial x^k} - \right. \\ \left. - \frac{\partial\,(c_k \pm v_k)}{\partial x^m}\right] - c_k\left[\frac{\partial\,(c_m \pm v_m)}{\partial x^i} - \frac{\partial\,(c_i \pm v_i)}{\partial x^m}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.271}$$

où le signe "plus" caractérise notre Univers, et le signe "moins", celui de l'Univers miroir.

La quantité $\eta_0 = \eta\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$ pour les particules sans masse, est nulle, car celles-ci voyagent à la vitesse de la lumière. En se rappelant que $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$, on obtient une condition supplémentaire imposée au tenseur de non holonomicité de l'espace isotrope $\tilde{A}_{ik}$: en chaque point

de la trajectoire de toute particule sans masse, la condition

$$\hbar^{mn} A_{mn} = 2\hbar\,(A_{12} + A_{23} + A_{31}) = 0\,, \tag{4.272}$$

doit être satisfaite. Ou encore, dans une autre notation, $\Omega^1 + \Omega^2 + \Omega^3 = 0$.

Par conséquent, dans une région où l'observateur "voit" la particule sans masse, la vitesse angulaire de rotation de l'espace non isotrope de l'observateur, est égale à zéro. Les autres termes liés à l'énergie de spin relativiste de la particule (4.271), résultent d'une possible nature instationnaire de la vitesse de la lumière $\frac{{}^*\partial c_i}{\partial t}$, et d'autres dépendances, qui incluent les carrés de la vitesse de lumière.

Nous analyserons la formule obtenue (4.271), en faisant deux simplifications :

a) Le potentiel de gravitation est négligeable ($\mathrm{w} \approx 0$) ;

b) La 3-vitesse spatiale chr.inv. de la lumière est stationnaire.

Dans ce cas, les quantités A_{ik} et $\breve{A}_{ik}$ (le tenseur de non holonomicité de l'espace de l'observateur, et le rotationnel d'espace isotrope), se réduisent à

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right), \qquad \breve{A}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_k}{\partial x^i} - \frac{\partial c_i}{\partial x^k}\right), \tag{4.273}$$

et l'énergie de spin relativiste de la particule sans masse (4.271), devient

$$\eta = n\left(\hbar^{ik}\breve{A}_{ik} + \frac{1}{c^2}\,c_i c^m \hbar^{ik}\breve{A}_{km}\right). \tag{4.274}$$

Par conséquent, cette dernière quantité η, qui décrit l'action du spin de la particule sans masse, est uniquement définie par le rotationnel d'espace isotrope, et ne dépend en aucune façon de la non holonomicité de l'espace de l'observateur (la rotation).

Afin de rendre cette déduction plus explicite, nous transformerons η (4.274) comme suit. Comme pour le pseudo-vecteur $\Omega^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm} A_{km}$, nous introduirons le pseudo-vecteur

$$\breve{\Omega}^{*i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikm}\breve{A}_{km}\,, \tag{4.275}$$

qui peut être formellement interprété comme le pseudo-vecteur des vitesses angulaires de rotation de l'espace isotrope.

Par voie de conséquence, $\breve{A}_{km} = \varepsilon_{kmn}\breve{\Omega}^{*n}$. Alors, l'équation qui donne η (4.274), peut être formulée suivant

$$\eta = n\left(\hbar_{*i}\breve{\Omega}^{*i} + \frac{1}{c^2}\,c_i c^m \hbar^{ik}\,\varepsilon_{kmn}\breve{\Omega}^{*n}\right). \tag{4.276}$$

Type de photons	Fréquence $\breve{\Omega}$, s^{-1}
Ondes radio	$10^3 \div 10^{11}$
Rayons infrarouges	$10^{11} \div 1.2 \times 10^{15}$
Lumière visible	$1.2 \times 10^{15} \div 2.4 \times 10^{15}$
Rayons ultraviolets	$2.4 \times 10^{15} \div 10^{17}$
Rayons X	$10^{17} \div 10^{19}$
Rayons gamma	$10^{19} \div 10^{23}$, et au-delà

Tableau 4.2 – Fréquences de rotation de l'espace isotrope, qui correspondent aux photons.

On en déduit que le rotationnel mécanique interne (spin) d'une particule dépourvue de masse, se manifeste dans l'interaction avec le rotationnel de l'espace isotrope. Le résultat de cette interaction est alors donné par le produit scalaire $\hbar_{*i}\breve{\Omega}^{*i}$, qui se rattache au spin de la particule sans masse. Les particules dépourvues de masse sont donc des rotationnels élémentaires du genre lumière de l'espace isotrope lui-même.

Évaluons à présent les rotations de l'espace isotrope pour les particules sans masse, possédant des énergies distinctes. Nous sommes maintenant certains que parmi les particules sans masse, se trouvent les photons — les quanta du champ électromagnétique. Le nombre quantique de spin du photon est 1. Par ailleurs, son énergie $E = \hbar\omega$ est positive dans notre Univers. Donc, en prenant en compte l'intégrale des forces vives (4.255), nous aurons pour les photons observables de notre Univers

$$\hbar\omega = \hbar_{*i}\breve{\Omega}^{*i} + \frac{1}{c^2}\, c_i c^m \hbar^{ik}\, \varepsilon_{kmn}\breve{\Omega}^{*n}. \tag{4.277}$$

Supposons le pseudo-vecteur de rotation de l'espace isotrope Ω^{*i} dirigé suivant l'axe z, et la vitesse de la lumière dirigée suivant y. La relation (4.277) obtenue pour les photons devient alors $\hbar\omega = 2\hbar\breve{\Omega}$, ou en éliminant la constante de Planck

$$\breve{\Omega} = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi\nu}{2} = \pi\nu\,, \tag{4.278}$$

d'où l'on voit que la fréquence $\breve{\Omega}$ de rotation de l'espace isotrope pour les particules dépourvues de masse, est constante, et coïncide avec la fréquence propre ν de la particule. Grâce à cette formule, qui découle de la loi de quantification pour les masses relativistes des particules sans masse, on peut évaluer les vitesses angulaires de l'espace isotrope qui correspondent aux énergies des différents types de photons, ce que résume le tableau 4.2.

On peut alors voir clairement que les vitesses angulaires de rotation de l'espace isotrope pour ces photons, choisies dans le domaine des rayons gamma, sont de l'ordre de grandeur des rotations régulières d'espace pour les électrons et les autres particules élémentaires (voir tableau 4.1).

§ 4.11 Conclusions

Résumons les résultats obtenus au cours de ce chapitre.

Le spin de toute particule se caractérise par un tenseur antisymétrique quadridimensionnel de 2ème rang, appelé le tenseur de Planck. Ses composantes diagonales d'espace-temps sont nulles, tandis que ses composantes spatiales non diagonales sont $\pm\hbar$, dépendant de la direction spatiale du spin et de notre choix d'un système de référence "droit" ou "gauche".

Le spin (le champ vertical interne de la particule), interagit avec le champ extérieur de l'espace non holonome. Il en résulte que la particule reçoit une impulsion supplémentaire qui fait dévier son mouvement d'une ligne géodésique. L'énergie d'interaction s'obtient à partir de l'équation scalaire chr.inv. du mouvement de la particule (théorème des forces vives), et l'on doit donc en tenir compte lors de la résolution des équations dynamiques vectorielles chr.inv.

La loi de quantification des masses élémentaires est une solution particulière des équations scalaires chr.inv. qui relient sans ambiguïté :

— Les masses au repos des particules élémentaires avec les vitesses angulaires de rotation de l'espace de l'observateur ;

— Les masses relativistes des photons et les vitesses angulaires de rotation de leur espace interne du genre lumière.

Les domaines où se situent les particules du genre lumière sont le siège de trajectoires quadridimensionnelles isotropes : les termes "espace du genre lumière" et "espace isotrope" sont donc ici parfaitement synonymes.

Notons pour conclure, que l'ensemble des résultats exposés ici, a été déduit exclusivement à partir de considérations géométriques de la relativité générale, sans recourir aux principes de la mécanique quantique. On peut alors raisonnablement penser que ces résultats peuvent constituer une passerelle entre les deux théories.

Chapitre 5 Le vide physique

§ 5.1 Introduction

Selon les données les plus récentes, la densité de matière qui emplit notre Univers est de $\sim 5 \div 10 \times 10^{-30}\,\mathrm{g/cm^3}$. La densité moyenne de substances concentrées dans les galaxies est plus élevée, $\sim 10^{-24}\,\mathrm{g/cm^3}$ pour notre galaxie. Les observations astronomiques montrent que la plupart des masses cosmiques se trouve concentrée dans les objets compacts, par exemple, les étoiles, dont le volume total n'est pas comparable à celui de l'ensemble d'univers (la répartition de la substance est ainsi à caractère hétérogène, assimilable à des "îlots"). Nous supposons ainsi que notre Univers est principalement vide.

Depuis longtemps, les mots "vacuité" et "vide", ont été considérés comme étant synonymes. Mais à partir des années 1920, les méthodes d'analyse géométrique directement issues de la relativité générale, ont permis de montrer que ces définitions se rapportaient en réalité à des stades distincts de l'état de la matière.

La distribution de la matière dans l'Univers, est caractérisée par le tenseur d'énergie-impulsion, qui est lié à la structure géométrique de l'espace-temps (tenseur métrique fondamental), par l'intermédiaire des équations gravitationnelles du champ. La théorie de la gravitation d'Einstein, qui exploite les méthodes mathématiques de la géométrie de Riemann, se traduit par les *équations d'Einstein*[*]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.1}$$

En dehors du tenseur d'énergie-impulsion, et du tenseur métrique fondamental, ces équations contiennent d'autres quantités, à savoir :

1) $R_{\alpha\sigma} = R_{\alpha\beta\sigma.}^{\cdots\beta}$ est le tenseur de Ricci[†], qui est la contraction du tenseur de Riemann-Christoffel $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sur deux indices ;

2) $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ est la courbure scalaire ;

[*]Le membre de gauche des équations du champ (5.1), est souvent appelé *Tenseur d'Einstein* $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R$, noté $G_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$.

[†]Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), est un mathématicien italien qui fût le professeur de Tullio Levi-Civita à Padoue, dans les années 1890.

3) $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1.862 \times 10^{-27}$ [cm/g] représente la constante de gravitation d'Einstein, tandis que $G = 6.672 \times 10^{-8}$ [$\mathrm{cm}^3/\mathrm{g\ s}^2$] est la constante de gravitation de Gauss. Notons que certains auteurs (Landau et Lifshitz [10]), utilisent $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, tandis que $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ est employée par Zelmanov et d'autres théoriciens. Pour comprendre ce dernier choix, il convient d'examiner les projections chr.inv. du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$, c'est-à-dire que $\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho$ est le scalaire chr.inv. de la densité de masse observable, $\frac{c\,T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = J^i$ est le vecteur chr.inv. de la densité vectorielle d'impulsion observable, et $c^2 T^{ik} = U^{ik}$, est le tenseur chr.inv. de la densité de flux d'impulsion observable [9]. En conséquence, la projection scalaire chr.inv. des équations d'Einstein est $\frac{G_{00}}{g_{00}} = -\frac{\varkappa T_{00}}{g_{00}} + \lambda$. Nous savons que le tenseur de Ricci a les dimensions [cm^{-2}], et donc le tenseur d'Einstein $G_{\alpha\beta}$ et les quantités $\frac{\varkappa T_{00}}{g_{00}} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$ ont les mêmes dimensions. Par conséquent, il est évident que la dimension du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ est celle d'une densité de masse [$\mathrm{g/cm}^3$]. Il en résulte qu'en utilisant $\frac{8\pi G}{c^4}$ au membre de droite des équations d'Einstein, on n'écrit pas l'expression du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$, mais la quantité $c^2 T_{\alpha\beta}$, dont les projections chr.inv. scalaires et vectorielles sont la densité d'énergie observable $\frac{c^2 T_{00}}{g_{00}} = \rho c^2$, et le flux d'énergie observable $\frac{c^3 T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = c^2 J^i$;

4) λ [cm^{-2}], représente le fameux *terme cosmologique*, qui décrit les forces non newtoniennes d'attraction ou de répulsion, suivant le signe qui lui est attribué : $\lambda > 0$ indique la répulsion, $\lambda < 0$ indique l'attraction. On qualifie ce terme de "cosmologique", car on admet que les forces représentées par λ augmentent proportionnellement à la distance, et se révèlent ainsi à l'échelle des distances cosmologiques, comparables à la dimension de l'Univers. A ce jour, les champs gravitationnels non newtoniens n'ont pas été détectés (champs-λ) dans notre Univers en général, et la valeur de ce terme a été déterminée à $|\lambda| < 10^{-56}\,\mathrm{cm}^{-2}$ (selon les mesures les plus précises dont nous disposons actuellement).

A partir des équations d'Einstein (5.1), on peut voir que le tenseur d'énergie-impulsion qui décrit la distribution de matière, est lié de manière "organique" à la fois au tenseur métrique et au tenseur de Ricci, et par suite, au tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. L'annulation de ce dernier tenseur, est la condition nécessaire et suffisante, pour que l'espace-temps soit plan. Le tenseur de Riemann-Christoffel qui est non nul, caractérise toujours des espaces courbes. On définit celui-ci, au

moyen de l'accroissement d'un vecteur arbitraire V^α qui est transporté parallèlement le long d'un contour fermé

$$\Delta V^\mu = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\cdot}^{\cdots\mu} V^\alpha \Delta\sigma^{\beta\gamma}, \tag{5.2}$$

où $\Delta\sigma^{\beta\gamma}$ est la surface infinitésimale délimitée par le contour. Par suite, le vecteur initial V^α et le vecteur $V^\alpha + \Delta V^\alpha$, ont des directions distinctes. Du point de vue quantitatif, la différence est donnée par une quantité K, qui est appelée la *courbure quadridimensionnelle*, de l'espace pseudo-riemannien, le long du transport parallèle envisagé (voir [9] pour plus de détails)

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\tan\varphi}{\Delta\sigma}, \tag{5.3}$$

où $\tan\varphi$ est la tangente de l'angle formé par le vecteur $\tan\varphi$, et la projection du vecteur $V^\alpha + \Delta V^\alpha$, sur la surface du contour fermé. Considérons par exemple, un "triangle géodésique" découpé sur une surface, et qui est formé à par l'intersection de trois lignes géodésiques. En chaque point arbitraire de ce triangle, se trouve défini un vecteur qui est transporté parallèlement le long des côtés de ce triangle. Une fois le vecteur revenu à son point initial, l'angle de rotation globale φ est égal à $\varphi = \Sigma - \pi$ (où Σ est la somme des angles intérieurs du triangle). On admet que la courbure de la surface K est la même en tous ses points, et donc

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\tan\varphi}{\Delta\sigma} = \frac{\varphi}{\sigma} = conste, \tag{5.4}$$

où σ est l'aire du triangle, et $\varphi = K\sigma$ est appelé *l'excès de sphéricité*. Si $\varphi = 0$, alors pour la courbure, on a $K = 0$, et la surface est plate. Dans ce cas, la somme de tous les angles extérieurs du triangle géodésique est π (espace plan). Si $\Sigma > \pi$, (lors de sa rotation, le sens du vecteur transporté reste orienté vers l'intérieur du contour), et l'excès de sphéricité est positif, d'où pour la courbure $K > 0$. L'exemple d'un tel espace est celui de la surface de la sphère : un triangle découpé sur cette surface est convexe. Si $\Sigma < \pi$, (le sens du vecteur transporté reste orienté vers l'extérieur du contour), l'excès de sphéricité est négatif, d'où pour la courbure $K < 0$.

Einstein postulait que la gravitation était représentée par la courbure de l'espace-temps. Il entendait par là que la courbure correspondait à un tenseur de Riemann-Christoffel non nul, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ (comme en géométrie de Riemann). Cette conception intègre complètement le principe de gravitation newtonien, et la courbure de gravitation quadri-

dimensionnelle, pour un observateur physique usuel, se manifeste au travers des propriétés suivantes :

a) Gravitation newtonienne ;

b) Rotation de l'espace tridimensionnel (section spatiale) ;

c) Déformation de l'espace tridimensionnel ;

d) La courbure tridimensionnelle, où les dérivées premières des symboles de Christoffel ne sont pas nulles.

Selon le Principe de Mach, sur lequel repose la théorie de la gravitation d'Einstein, "...la propriété de l'inertie est entièrement déterminée par l'interaction de la matière" [29], d'où il découle que la courbure d'espace-temps est engendrée par la matière qui y est contenue. Procédant de cette affirmation, et à partir des équations d'Einstein (5.1), nous pouvons donner les *définitions respectives de la vacuité et du vide* :

La vacuité est l'état d'un espace-temps donné, pour lequel le tenseur de Ricci vérifie $R_{\alpha\beta}=0$, ce qui implique l'absence de toute substance $T_{\alpha\beta}=0$, et celle des champs gravitationnels non newtoniens $\lambda=0$. Les équations du champ (5.1) pour la vacuité* s'écrivent simplement $R_{\alpha\beta}=0$;

Le vide est l'état pour lequel toute substance est absente $T_{\alpha\beta}=0$, mais où $\lambda\neq 0$, et donc $R_{\alpha\beta}\neq 0$. La vacuité est un cas particulier du vide où le champs-λ est absent. Les équations du champ pour le vide s'écrivent

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R=\lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.5}$$

Les équations d'Einstein sont applicables à la plupart des cas de distribution matérielle, à l'exception de l'échelle des densités massiques proches de celles des noyaux atomiques. Il est toutefois difficile de fournir une description mathématique exacte de tous les cas de contributions matérielles, car le problème ne peut être abordé dans toute sa généralité. Par contre, la densité moyenne de matière de l'Univers observé étant tellement faible $5\div 10\times 10^{-30}$ g/cm^3, que l'on peut la négliger et la réduire au vide. Les équations d'Einstein nous indiquent que le tenseur d'énergie-impulsion est toujours fonction du tenseur métrique et du tenseur de Ricci, (contraction du tenseur de courbure sur deux indices). Compte tenu de la faible valeur numérique de la densité de matière

*Si on exprime les équations d'Einstein pour un espace vide $R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R=0$, en indices mixtes $R^{\beta}_{\alpha}-\frac{1}{2}\,g^{\beta}_{\alpha}R=0$, puis en contractant $(R^{\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{2}g^{\alpha}_{\alpha}R=0)$, on obtient $R-\frac{1}{2}\,4R=0$. La courbure scalaire de la vacuité est donc $R=0$. Par suite les équations du champ (équations d'Einstein) pour cet espace sont $R_{\alpha\beta}=0$.

envisagée, on peut admettre que le tenseur d'énergie-impulsion est simplement proportionnel au tenseur métrique $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, et donc proportionnel au tenseur de Ricci. Par conséquent, en dehors des équations du champ pour le vide, (5.5), on peut considérer les équations

$$R_{\alpha\beta} = k\, g_{\alpha\beta}\,, \qquad k = conste, \tag{5.6}$$

c'est-à-dire où le tenseur d'énergie-impulsion diffère du tenseur métrique par une constante. Ce cas qui inclut l'absence de masses (vide), et d'autres conditions semblables au regard de notre Univers, furent étudiées en détails par Petrov [30, 31]. Petrov rassembla les espaces dont le tenseur d'énergie-impulsion est proportionnel au tenseur métrique (et au tenseur de Ricci), sous le nom *d'espaces d'Einstein.*

Dans les espaces d'Einstein, $R_{\alpha\beta} = kg_{\alpha\beta}$, la substance est homogène en chaque point, et dépourvue de tout courant, donc la densité de matière doit être partout constante, y compris celle de n'importe quelle autre sorte de substance. Dans ce cas,

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = k\, g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 4k\,, \tag{5.7}$$

et le tenseur d'Einstein prend la forme

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -k\, g_{\alpha\beta}\,, \tag{5.8}$$

où $kg_{\alpha\beta}$ est l'équivalent du tenseur d'énergie-impulsion de la masse, qui emplit les espaces d'Einstein.

Pour trouver les différentes formes de matière qui peuvent intervenir dans les espaces d'Einstein, Petrov a étudié la structure algébrique des divers tenseurs d'énergie-impulsion.

A cet effet, il a comparé le tenseur $T_{\alpha\beta}$, au tenseur métrique en un point arbitraire, où il a évalué la différence $T_{\alpha\beta} - \xi g_{\alpha\beta}$, et où ξ sont les valeurs propres associées à la matrice $T_{\alpha\beta}$. Alors, la détermination des ξ revient à résoudre le problème aux valeurs propres pour la matrice considérée. Dans le cas d'une métrique à signe constant, ce problème bien connu a déjà été résolu, mais Petrov a proposé une méthode qui permet de réduire toute matrice à la forme canonique, pour une métrique à signe alterné, et qui puisse donc s'appliquer à un espace pseudo-riemannien.

Une telle méthode permet en particulier d'étudier la structure algébrique des tenseurs d'énergie-impulsion, et peut s'illustrer de la façon suivante. Les valeurs propres qui correspondent aux éléments de la matrice $T_{\alpha\beta}$, sont assimilables aux vecteurs de base de la matrice du tenseur

métrique de telle manière que ces valeurs propres confèrent une "ossature" au tenseur $T_{\alpha\beta}$, (ossature massique). Cependant, même si la forme de cette ossature est connue, on ignore presque tout de la structure qui s'y rattache. On peut toutefois exploiter cette donnée (longueurs et directions des vecteurs de base), au moyen des propriétés de la matière, telles que l'homogénéité et l'isotropie, ainsi que par leur relation avec la courbure d'espace. Petrov a ainsi démontré que les espaces d'Einstein sont caractérisés par des tenseurs d'énergie-impulsion, que l'on peut réduire à 3 types algébriques et à quelques sous classifications. Nous sommes alors conduits à la classification algébrique suivante des cas possibles de réduction des espace d'Einstein, aux *types canoniques de Petrov* (I–III)*.

Les espaces d'Einstein de type I se conçoivent intuitivement, en observant que le champ de gravitation est ici engendré par un "îlot" de matière (distribution hétérogène de substance), alors que l'espace même, correspond à l'état de vacuité, ou à celui du vide. La courbure d'un tel espace est produite par la masse de l'amas local, et par l'état du vide. A grandes distances de cet amas, en l'absence de vide, cet espace est plan. Dépourvu de toute masse hétérogène, l'espace vide de type I, possède une courbure (exemple : Espaces de de Sitter). Un espace de type I, correspondant à la vacuité, (dépourvu de masses hétérogènes), est plan.

Les espaces de types II et III, sont plus "exotiques", car ils sont pourvus d'une courbure intrinsèque. Cette courbure n'est ni induite par une distribution homogène de matière, ni par l'état de vide. Les types II et III sont généralement attribués à la présence de champs radiatifs, tels, par exemple, les ondes gravitationnelles.

Peu de temps après, Gliner [33–35], dans son étude sur la structure algébrique du tenseur d'énergie-impulsion pour les états de vide de la matière ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$), soulignait le caractère singulier d'un type, où les quatre valeurs propres sont identiques, c'est-à-dire où les trois vecteurs d'espace, et le vecteur temporel, sont égaux entre eux† (ortho-référentiel du tenseur $T_{\alpha\beta}$). Dans une telle configuration, la matière qui correspond au tenseur d'énergie-impulsion, possède une

*L'interprétation chr.inv. de cette classification algébrique des espaces d'Einstein (où en d'autres termes, celle des champs gravitationnels de Petrov), a été obtenue en 1970, par le co-auteur de cet ouvrage (Borissova, née Grigoreva [32]).

†Si on introduit un espace plan local, tangent en un point donné à l'espace riemannien, alors les valeurs propres ξ du tenseur $T_{\alpha\beta}$, sont les quantités correspondant à ce tenseur dans un ortho-référentiel, contrairement aux valeurs propres du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ par rapport à l'ortho-référentiel défini dans cet espace tangent.

densité constante $\mu = conste$, qui coïncide avec les valeurs propres du tenseur d'énergie-impulsion $\mu = \xi$ (la dimension de μ est la même que celle de $T_{\alpha\beta}$ [g/cm^3]). Le tenseur d'énergie-impulsion est dans ce cas*

$$T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta} \,. \tag{5.9}$$

Les équations du champ avec $\lambda = 0$, s'écrivent

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa \mu g_{\alpha\beta} \,, \tag{5.10}$$

et avec le terme cosmologique $\lambda \neq 0$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa \mu g_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} \,. \tag{5.11}$$

Gliner appelle cet état de la matière "vide-μ" [33–35]: cet état qui est en effet relié aux états de vide de la substance, ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$), n'est pas en réalité exactement vide (pour le vide : $T_{\alpha\beta} = 0$). Dans le même temps, Gliner montra que les espaces emplis de vide-μ, sont des espaces d'Einstein, et par suite, il existe 3 types de vide-μ, qui correspondent chacun aux 3 types de classification des tenseurs d'énergie-impulsion (ainsi qu'aux tenseurs de courbure). En d'autres termes, et à condition que la matière soit présente, un espace d'Einstein de chaque type, (I, II, et III), est empli de vide-μ, correspondant chacun aux types I, II ou III.

En réalité, le tenseur d'énergie-impulsion du vide-μ, étant rapporté à l'ortho-référentiel, les trois vecteurs d'espace et le vecteur temporel sont identiques (les 4 directions sont d'égales importance), et le vide-μ constitue le degré maximal d'isotropie de la matière. Par ailleurs, étant donné que les espaces d'Einstein sont homogènes, et donc la densité de matière est la même en chaque point [30, 31], la densité du vide-μ, qui les remplit, n'est pas seulement constante, mais également homogène.

Ainsi que nous l'avons vu, les espaces d'Einstein, peuvent être remplis de vide-μ, soit dans l'état de vide ordinaire, ($T_{\alpha\beta} = 0$), ou dans celui de la vacuité. En outre, il est toujours possible de trouver des amas hétérogènes isolés, qui peuvent localement incurver l'espace. Par conséquent, les espaces d'Einstein, du type I sont de fait, les plus représentatifs de notre connaissance de l'Univers, pris dans son ensemble.

*Gliner emploie la signature $(-+++)$, et donc, il obtient $T_{\alpha\beta} = -\mu g_{\alpha\beta}$. Puisque la densité observable est positive $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = -\mu > 0$, les valeurs numériques de μ, sont négatives. Dans le présent ouvrage, nous adoptons la signature $(+---)$, car dans ce cas, le 3-intervalle observable est positif, et donc, $\mu > 0$, avec $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$.

L'étude de sa géométrie, ainsi que des états de sa matière, se ramène alors, à l'étude des espaces d'Einstein de type I.

Petrov a démontré le théorème qu'il avait précédemment proposé, (voir §13 dans [30]), et qui est évidemment connu sous le nom de *Théorème de Petrov* :

Théorème de Petrov

Tout espace à courbure constante, est un espace d'Einstein. < d'où > ...les espaces d'Einstein de type II et III, ne peuvent être des espaces à courbure constante.

Donc, d'après la classification de Petrov, les espaces à courbure constante, sont des espaces d'Einstein de type I. Si $K=0$, un espace d'Einstein de type I, est plan. Notre étude du vide et de l'état de vide de la matière, s'en trouve notablement simplifiée, car on possède aujourd'hui une très bonne connaissance analytique de ces espaces à courbure constante. Ceux-ci sont les *espaces de de Sitter*, où des espaces munis d'une métrique de de Sitter.

Dans tout espace de ce type, on a $T_{\alpha\beta}=0$ et $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire qu'il est caractérisé par un vide ordinaire, et ne contient aucun amas de substances. Par contre, on sait que la densité moyenne de notre Univers est très faible.

En première analyse, on peut négliger ces "îlotsde matière" aléatoires, et autres hétérogénéités, qui sont susceptibles de déformer localement l'espace. Notre Univers, peut donc être considéré comme un espace de de Sitter à rayon de courbure constante, comparable à celui de l'Univers. En théorie, on peut attribuer à un espace de de Sitter, une courbure positive $K>0$, ou négative $K<0$. L'analyse de l'univers de de Sitter permet de montrer (voir Synge [36]), que pour $K<0$, les géodésiques du genre temps, sont des courbes fermées : le mouvement d'une particule d'épreuve, se répète indéfiniment le long de la même trajectoire. Cette particularité conduit immédiatement à imaginer des perspectives inexplorée, vis-à-vis des conceptions classiques de la physique actuelle. C'est pourquoi la plupart des physiciens (Synge, Gliner, Petrov, et d'autres), ont systématiquement délaissé l'étude des espaces de de Sitter à courbure négative.

Comme on le sait, les espaces riemanniens à courbure positive, généralisent la sphère ordinaire, alors que ceux à courbure négative sont la généralisation des espaces de Lobachewski-Bolyai, et qui généralisent une sphère de rayon imaginaire. Dans l'interprétation de Poincaré, les espaces à courbure négative sont représentables par la surface interne d'une sphère. Dans l'espace pseudo-riemannien (métrique à signe al-

terné), Zelmanov a montré que la courbure tridimensionnelle observable, est négative par rapport à la 4-courbure riemannienne. Si la perception de notre planète est toujours celle d'une sphère, avec sa courbure observée positive, on peut toujours imaginer des êtres, qui, vivant à la surface interne de notre planète, ne "verraient" qu'un monde concave, et n'observeraient alors que la courbure négative.

A partir de cet exemple, on pourrait prédire l'existence d'un monde gémellaire, où un *univers miroir* serait situé aux "antipodes". Notre Univers étant à priori pourvu d'une courbure positive, il fût initialement admis qu'un tel Univers miroir devait posséder une courbure négative. Synge (voir [36], chapitre VII), montra toutefois que pour un univers de de Sitter à courbure positive, les géodésiques du genre espace étaient ouvertes, tandis que pour le même modèle à courbure négative, ces mêmes géodésiques sont fermées. Autrement dit, un Univers de de Sitter à courbure négative, n'est pas la réflexion de sa contrepartie à courbure positive. Par contre, lors de notre étude, [19] (voir aussi §13), nous avions traité par une autre approche, du concept de l'Univers miroir, et dans lequel avait été envisagé le mouvement des particules libres, avec un écoulement du temps inversé. Nous avions ainsi déduit que la composante scalaire observable du 4-vecteur impulsion d'une particule, constitue en fait sa masse relativiste négative. Il est alors digne d'intérêt d'observer que les particules dont les masses sont associées au miroir, ont été obtenues en projetant leur 4-impulsion sur les lignes de temps d'un observateur standard, sans avoir à changer le signe de la courbure d'espace : pour un écoulement du temps direct ou inversé, les particules peuvent exister indifféremment dans des espaces à courbure positive ou négative.

Ces résultats fondamentaux, entièrement déduits à partir des méthodes géométriques de la relativité générale, affectent inévitablement notre vision de la matière et de la cosmologie, associées à notre Univers.

Au §5.2, nous déterminerons le tenseur d'énergie-impulsion du vide, et nous obtiendrons une formule qui décrit sa densité observable. Nous introduirons également une classification pour la matière, en accord avec les formules déduites pour le tenseur d'énergie-impulsion (à savoir la *classification* T). Au §5.3, nous examinerons les propriétés physiques du vide dans les espaces d'Einstein du type I ; en particulier, nous discuterons des propriétés physiques du vide dans le cadre des espaces de de Sitter, pour en tirer des conclusions inhérentes à la structure globale de l'Univers. Poursuivant dans cette perspective au §5.4, nous établirons le concept de l'origine et du développement de l'Univers, consécutivement à *l'Inversion-Explosion*, à partir de la "pré-particule", qui possède cer-

taines propriétés bien spécifiques. Au §5.5, nous obtiendrons une formule pour la force d'inertie gravitationnelle non newtonienne, qui se révèlera proportionnelle à la distance ; les §5.6 et §5.7, eux, se rapporteront aux phénomènes du collapse dans un espace de Schwarzchild (collapse gravitationnel, ou *collapsar gravitationnel*), et dans un espace de de Sitter (collapse inflationnaire ou *inflanton*). Au cours du chapitre 6, il sera démontré que notre Univers et l'Univers miroir, sont des mondes dont le temps est celui du miroir, et qui cœxistent dans un espace de de Sitter, pourvu d'une courbure quadridimensionnelle négative. Nous établirons ensuite les conditions physiques qui permettent le passage à travers la "membrane", qui sépare notre Univers de l'Univers miroir.

§ 5.2 Densité observable du vide. Introduction de la classification T pour la matière

Les équations du champ de gravitation d'Einstein, sont des fonctions qui relient la courbure d'espace à la distribution de matière. Généralement, ont les écrit : $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$, le membre de gauche décrit la géométrie de l'espace, tandis que le membre de droite décrit la matière qui y est contenue. Le signe du second terme dépend de celui de λ. Ainsi que nous le verrons, ce signe de λ, et donc le mode d'action de la gravitation newtonienne (attraction ou répulsion), est directement lié au signe de la densité du vide.

Les espaces d'Einstein sont définis par la condition $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, les équations du champ sont-elles, données par $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$. De telles équations peuvent exister suivant deux cas : a) lorsque $T_{\alpha\beta} \neq 0$ (substance) ; b) lorsque $T_{\alpha\beta} = 0$ (vide). Le tenseur d'énergie-impulsion étant égal à zéro dans un espace d'Einstein pour le vide, il ne peut pas être proportionnel au tenseur métrique, ce qui contredit la définition de ce type d'espace ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$).

Comment résoudre ce paradoxe ? En l'absence de toute substance, mais en présence du vide standard, les équations du champ sont $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = \lambda g_{\alpha\beta}$, donc la courbure d'espace est produite par les champs-λ, (champs gravitationnels non newtoniens), plutôt que par les substances elles-mêmes. En l'absence de ces dernières et des champs-λ, $R_{\alpha\beta} = 0$, l'espace est vide, mais en général, il n'est pas plan. On voit donc que les champs-λ, et le vide, sont pratiquement identifiables, c'est-à-dire que *le vide est un champ gravitationnel non newtonien.*

A ce stade de notre étude, nous aurons ainsi proposé une *définition physique du vide*, qui implique que les champs-λ reflètent l'action d'un potentiel de ce vide.

C'est dire encore, que le terme $\lambda g_{\alpha\beta}$, ne peut être ignoré dans les équations du champ, quelque soit sa petitesse, car il décrit le vide qui incurve l'espace. Par suite, les équations du champ $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$, peuvent être mises sous la forme

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\varkappa \widetilde{T}_{\alpha\beta}\,, \tag{5.12}$$

où, dans le membre de droite, le tenseur

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \breve{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta} \tag{5.13}$$

représente le tenseur d'énergie-impulsion qui décrit la matière en général (substance et vide). Le premier terme est ici le tenseur d'énergie-impulsion de la substance. Le second terme

$$\breve{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta} \tag{5.14}$$

est analogue au tenseur d'énergie-impulsion pour le vide.

Par conséquent, puisque les espaces d'Einstein peuvent être rattachés au vide, leur définition mathématique se doit d'être formulée dans un sens très général qui puisse prendre en compte à la fois, la présence de substance, et le vide (champs-λ) : $\widetilde{T}_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$. Cette formulation évitera en particulier, les contradictions inhérentes aux espaces d'Einstein pour les états de vacuité.

Notons que les formules obtenues pour le tenseur d'énergie-impulsion du vide (5.14), sont une conséquence directe des équations du champ sous forme générale.

Si $\lambda > 0$, (forces de gravitation non newtoniennes répulsives), la densité observable du vide est négative

$$\breve{\rho} = \frac{\breve{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{|\lambda|}{\varkappa} < 0\,, \tag{5.15}$$

alors que si $\lambda < 0$ (forces d'attractions gravitationnelles non newtoniennes), la densité du vide observable, est au contraire positive

$$\breve{\rho} = \frac{\breve{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{|\lambda|}{\varkappa} > 0\,. \tag{5.16}$$

Comme nous le verrons au §5.3, cette dernière circonstance est capitale, car un espace de de Sitter avec $\lambda < 0$, étant à courbure constante négative*, et qui est uniquement caractérisé par le vide, (absence de sub-

*Il s'agit de la courbure riemannienne quadridimensionnelle.

stance), reste en très bon accord avec les données observables de notre Univers en général.

Par conséquent, suivant les études de Petrov, Gliner, et compte tenu de notre remarque sur la persistance du tenseur d'énergie-impulsion, donc des propriétés physiques dans le vide (champs-λ), nous sommes en mesure d'établir une classification "géométrique" des états de la matière, en fonction de leur tenseur d'énergie-impulsion. Nous définirons ainsi la *classification T pour la matière* :

I) VACUITE : $T_{\alpha\beta}=0$, $\lambda=0$ (espace sans matière), et les équations du champ sont $R_{\alpha\beta}=0$;

II) VIDE : $T_{\alpha\beta}=0$, $\lambda\neq 0$ (produit par les champs-λ), et les équations du champ sont $G_{\alpha\beta}=-\lambda g_{\alpha\beta}$;

III) VIDE-μ : $T_{\alpha\beta}=\mu g_{\alpha\beta}$, $\mu=conste$ (état de vide de la substance étendu à tout l'espace), les équations du champ sont $G_{\alpha\beta}= =-\varkappa\mu g_{\alpha\beta}$;

IV) SUBSTANCE : $T_{\alpha\beta}\neq 0$, $T_{\alpha\beta}\not\sim g_{\alpha\beta}$ (cet état comprend les substances ordinaires et les champs électromagnétiques).

Généralement, le tenseur d'énergie-impulsion d'une substance (type IV dans la classification T), n'est pas proportionnel au tenseur métrique. Il existe par contre, des états de substance pour lesquels le tenseur d'énergie-impulsion contient un terme proportionnel au tenseur métrique, mais, comme il n'inclut pas d'autres termes, cet état ne constitue pas un vide-μ. C'est le cas, par exemple, d'un fluide parfait

$$T_{\alpha\beta}=\left(\rho-\frac{p}{c^2}\right)U_\alpha U_\beta-\frac{p}{c^2}\,g_{\alpha\beta}\,, \tag{5.17}$$

où p est le scalaire des pressions, ou bien celui des champs électromagnétiques

$$T_{\alpha\beta}=F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}g_{\alpha\beta}-F_{\alpha\sigma}F_{\beta\cdot}^{\cdot\sigma}\,, \tag{5.18}$$

où $F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ est le premier invariant du champ électromagnétique considéré (3.27), $F_{\alpha\beta}$ étant ici le tenseur de Maxwell. Si $p=\rho c^2$ (substance à l'intérieur d'un noyau atomique), avec $p=conste$, le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait, semble être proportionnel au tenseur métrique.

Au prochain paragraphe §5.2, nous montrerons que l'équation d'état du vide-μ a une forme différente $p=-\rho c^2$ (état inflationnaire, expansion du milieu, dans le cas d'une densité positive). Par suite, la pression et la densité dans un noyau atomique, ne peuvent être constants si l'on suppose que sa substance interne évolue vers l'état de vide de la matière.

Il convient de noter que cette classification T, tout comme les équations du champ, ne se rapporte qu'à une distribution de matière, qui modifie la courbure d'espace, et non aux particules d'épreuve-matière ponctuelle dont la petitesse (négligeable) des masses et dimensions, n'influe pas sur cette courbure. Par conséquent, le tenseur d'énergie-impulsion n'est pas défini pour ces particules, qui ne relèvent donc pas de la classification T.

§ 5.3 Propriétés physiques du vide. Cosmologie

Les espaces d'Einstein sont définis par les équations du champ tels que $R_{\alpha\beta} = k\, g_{\alpha\beta}$, où $k = conste$. Avec $\lambda \neq 0$ et $T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}$, le tenseur d'énergie-impulsion est proportionnel au tenseur métrique fondamental, et l'espace qui emplit la matière, est le vide-μ. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent §5.2, le tenseur d'énergie-impulsion du vide, est aussi proportionnel au tenseur métrique. Il s'ensuit que les propriétés physiques du vide, et celles du vide-μ, sont pratiquement les mêmes, sauf pour le coefficient scalaire qui définit la composition de la matière (champs-λ, ou substance), et les valeurs absolues des forces actives. Par conséquent, nous allons considérer un espace d'Einstein associé au vide, et au vide-μ. Dans ce cas, les équations du champ deviennent

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} R = -\left(\varkappa\mu - \lambda\right) g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.19}$$

En les écrivant à l'aide d'indices mixtes, et contractant, on parvient à la courbure scalaire

$$R = 4\left(\varkappa\mu - \lambda\right), \tag{5.20}$$

puis, substituant dans les équations initiales (5.19), on obtient les équations du champ sous leur forme définitive

$$R_{\alpha\beta} = \left(\varkappa\mu - \lambda\right) g_{\alpha\beta}\,, \tag{5.21}$$

où $\varkappa\mu - \lambda = conste = k$.

Examinons les propriétés physiques du vide et du vide-μ. Nous pouvons en déduire les projections chr.inv. du tenseur d'énergie-impulsion : la densité de matière observable $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}$, la densité d'impulsion observable $J^i = \frac{c\, T_0^i}{\sqrt{g_{00}}}$, et le tenseur du champ observable $U^{ik} = c^2 T^{ik}$.

Pour le tenseur d'énergie-impulsion du vide-μ $T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}$, les projections chr.inv., sont

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \mu\,, \tag{5.22}$$

$$J^i = \frac{c\,T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,, \tag{5.23}$$

$$U^{ik} = c^2 T^{ik} = -\mu\, c^2 h^{ik} = -\rho c^2 h^{ik}. \tag{5.24}$$

Pour le tenseur d'énergie-impulsion $\breve{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta}$ (5.14), qui décrit l'état du vide, les projections chr.inv., sont, elles

$$\breve{\rho} = \frac{\breve{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa}\,, \tag{5.25}$$

$$\breve{J}^i = \frac{c\,\breve{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,, \tag{5.26}$$

$$\breve{U}^{ik} = c^2 \breve{T}^{ik} = \frac{\lambda}{\varkappa}\, c^2 h^{ik} = -\breve{\rho} c^2 h^{ik}. \tag{5.27}$$

On observe ici que le vide (champs-λ), et le vide-μ, ont des densités constantes, et donc caractérisent des *répartitions uniformes de matière.* Ce sont également des milieux non émissifs, car leur flux d'énergie $c^2 J^i$ est égal à zéro

$$c^2 \breve{J}^i = \frac{c^3 \breve{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,, \qquad c^2 J^i = \frac{c^3 T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0\,. \tag{5.28}$$

Dans le référentiel qui accompagne le milieu, le tenseur du champ est (voir le livre de Zelmanov [9])

$$U_{ik} = p_0 h_{ik} - \alpha_{ik} = p h_{ik} - \beta_{ik}\,, \tag{5.29}$$

où p_0 est la pression d'équilibre, définie par l'équation d'état, p est la pression réelle, α_{ik} est la *viscosité de deuxième espèce*, (le tenseur des viscosités), et $\beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{1}{3}\,\alpha h_{ik}$ est sa partie anisotrope (*viscosité de première espèce*, qui se manifeste dans les déformations), et où $\alpha = \alpha_i^i$ est la trace du tenseur α_{ik}.

Formulant le tenseur de champ pour le vide-μ (5.24) dans le référentiel qui accompagne le vide-μ même, on obtient

$$U_{ik} = p h_{ik} = -\rho c^2 h_{ik}\,, \tag{5.30}$$

et de façon similaire, pour le tenseur du champ du vide (5.27)

$$\breve{U}_{ik} = \breve{p} h_{ik} = -\breve{\rho} c^2 h_{ik} \tag{5.31}$$

ce qui implique que le vide et le vide-μ, sont des milieux non visqueux

($\alpha_{ik}=0$, $\beta_{ik}=0$), dont les équations d'état* sont données par

$$\breve{p} = -\breve{\rho}c^2, \qquad p = -\rho c^2. \tag{5.32}$$

Cet état est appelé *l'inflation*, car pour la densité de matière positive, la pression devient négative, et donc le milieu entre en expansion.

Telles sont les propriétés du vide et du vide-μ : ce sont des milieux homogènes $\rho = conste$, non visqueux $\alpha_{ik}=\beta_{ik}=0$, et non radiatifs $J^i=0$, en état d'inflation.

Ayant ainsi défini les propriétés physiques de base, nous allons aborder l'analyse du vide associé aux espaces à courbure constante, et en particulier l'espace de de Sitter, qui constitue la meilleure approximation pour décrire notre Univers.

Dans les espaces à courbure constante, le tenseur de Riemann-Christoffel est (voir chapitre VII du livre de Synge [36])

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\left(g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}\, g_{\beta\gamma}\right), \qquad K = conste. \tag{5.33}$$

Après avoir contracté sur deux indices, on obtient une formule pour le tenseur de Ricci, qui après une deuxième contraction, fournit la courbure scalaire. Nous avons ainsi

$$R_{\alpha\beta} = -3K g_{\alpha\beta}\,, \qquad R = -12K\,. \tag{5.34}$$

Si nous supposons notre Univers à courbure constante, on obtient les équations du champ formulées à l'aide de la courbure

$$3K g_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.35}$$

Nous pouvons les écrire avec les notations de Synge, sous la forme $(\lambda - 3K)\, g_{\alpha\beta} = \varkappa T_{\alpha\beta}$.

Dans un espace à courbure constante, le tenseur d'énergie-impulsion d'une substance est

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\lambda - 3K}{\varkappa}\, g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.36}$$

On voit que dans un espace à courbure constante, le problème de la géométrisation de la matière se trouve automatiquement résolu : le tenseur d'énergie-impulsion (5.36) ne contient que le tenseur métrique et des constantes.

---

*L'équation d'état d'une distribution matérielle, est une relation entre la pression et la densité. Par exemple, $p=0$ est l'équation d'état d'un fluide incohérent (poussières), $p=\rho c^2$ est l'équation d'état de la matière dans un noyau atomique, $p=\frac{1}{3}\rho c^2$ est l'équation d'état d'un gaz ultra-relativiste.

L'espace de de Sitter est à courbure constante, où $T_{\alpha\beta}=0$ et $\lambda\neq 0$, et il est donc empli de vide (absence de toute substance). En annulant le tenseur d'énergie-impulsion de la substance (5.36), on obtient le même résultat que Synge : l'espace de de Sitter est bien caractérisé par $\lambda=3K$.

Prenant en compte cette relation, la formule pour la densité du vide observable dans l'univers de de Sitter, devient

$$\breve{\rho}=-\frac{\lambda}{\varkappa}=-\frac{3K}{\varkappa}=-\frac{3Kc^2}{8\pi G}\,. \tag{5.37}$$

Nous arrivons maintenant à la question primordiale concernant le signe de la courbure quadridimensionnelle de notre Univers. Le fait de poser cette question, ne relève pas seulement de la curiosité, mais suivant la réponse que l'on apportera, le modèle de de Sitter élaboré précédemment, peut soit correspondre aux données actuellement observées, ou bien conduire à des résultats totalement étrangers aux valeurs astronomiques couramment admises.

En réalité, la courbure quadridimensionnelle étant positive, $K>0$, la densité du vide doit être négative, et par suite, la pression inflationnaire doit être supérieure à zéro (le vide se contracte). Puisque $\lambda>0$, les forces de gravitation newtoniennes sont répulsives. Nous sommes donc en présence de deux actions antagonistes : l'une, inflationnaire positive, qui tend à comprimer l'espace, et l'autre, qui implique des forces de gravitation non newtoniennes répulsives. Il en résulte que : premièrement, les forces-λ étant proportionnelles à la distance, leur effet expansif va augmenter avec l'accroissement du rayon de l'Univers, et l'expansion va s'accélérer. Deuxièmement, si la dimension de l'Univers était inférieure à la distance pour laquelle la pression de contraction du vide compense l'action expansive des forces-λ, l'expansion deviendrait alors impossible.

Si au contraire, la courbure quadridimensionnelle est négative, $K<0$, la pression inflationnaire sera inférieure à zéro, — le vide se dilate. En outre, comme dans ce cas $\lambda<0$, les forces de gravitation newtoniennes sont attractives. Par conséquent, l'Univers peut continuer à se dilater à partir d'un certain point, jusqu'à ce que la densité du vide devienne si faible, que l'action expansive s'équilibre avec les forces-λ de compression non newtoniennes.

On voit bien alors, que la question du signe de la courbure est cruciale, pour déterminer le cadre cosmologique de notre Univers.

Toutefois, la perception humaine étant par nature tridimensionnelle, il n'est pas possible pour un observateur régulier, d'apprécier le signe de la courbure quadridimensionnelle, au moyen d'observations directes. Pour pouvoir rendre compte de cette réalité, on doit recourir à la théorie

des invariants chronométriques-une méthode qui définit les quantités physiquement observables.

Parmi les buts que s'était fixé Zelmanov, on retient sa définition du tenseur courbure relatif à la section spatiale d'un observateur (l'espace tridimensionnel observable) — qui est en général inhomogène, non holonome, courbe, et déformé.

Le *tenseur de courbure de Zelmanov* (voir formule 5.40 — pour le tenseur, et 5.41 — pour ses contractions), possède toutes les caractéristiques du tenseur de Riemann-Christoffel, dans l'espace tridimensionnel de l'observateur, et possède en même temps la propriété d'invariance chronométrique.

Zelmanov décida de construire ce type de tenseur par similitude avec le tenseur de Riemann-Christoffel, et qui résulte de la non commutativité des dérivées secondes d'un vecteur arbitraire dans l'espace considéré. A partir de la différence des dérivées secondes chr.inv. d'un vecteur arbitraire, il parvint aux équations

$$^{*}\nabla_i\, ^{*}\nabla_k\, Q_l - {}^{*}\nabla_k\, ^{*}\nabla_i\, Q_l = \frac{2A_{ik}}{c^2}\frac{^{*}\partial Q_l}{\partial t} + H_{lki\cdot}^{\cdots j}\, Q_j\,, \tag{5.38}$$

qui contiennent le tenseur chr.inv.

$$H_{lki\cdot}^{\cdots j} = \frac{^{*}\partial \Delta_{il}^{j}}{\partial x^k} - \frac{^{*}\partial \Delta_{kl}^{j}}{\partial x^i} + \Delta_{il}^{m}\Delta_{km}^{j} - \Delta_{kl}^{m}\Delta_{im}^{j}\,, \tag{5.39}$$

et qui est en tout point semblable au tenseur de Schouten, déduit de la théorie des variétés non holonomes*. Cependant, dans le cas général en présence de rotation d'espace ($A_{ik} \neq 0$), le tenseur $H_{lki\cdot}^{\cdots j}$ diffère algébriquement du tenseur de Riemann-Christoffel. De ce fait, Zelmanov introduisit donc un nouveau tenseur

$$C_{lkij} = \frac{1}{4}\left(H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}\right), \tag{5.40}$$

qui n'est pas seulement une quantité chr.inv., mais qui possède toutes les propriétés algébriques du tenseur de Riemann-Christoffel. Le tenseur C_{lkij}, est ainsi le tenseur de courbure du 3-espace observable d'un observateur, qui accompagne son référentiel. Après contraction, on obtient

*Schouten avait élaboré la théorie des variétés non holonomes, pour des dimensions arbitraires de l'espace, en considérant un sous espace à m dimensions, immergé dans un espace à n dimensions, où $m < n$ [37]. Dans la théorie des invariants chronométriques, nous avons en fait considéré le sous espace de l'observateur ($m = 3$), plongé dans l'espace pseudo-riemannien de dimension ($n = 4$). Corrélativement, la théorie des invariants chronométriques est applicable à tout espace métrique en général — voir [9].

les quantités chr.inv.

$$C_{kj} = C_{kij\cdot}^{\cdots i} = h^{im} C_{kimj}\,, \qquad C = C_j^j = h^{lj} C_{lj}\,, \tag{5.41}$$

qui décrivent aussi la courbure de l'espace tridimensionnel. Les C_{lkij}, C_{kj}, et C étant des quantités chr.inv., ce sont également des quantités physiquement observables, pour cet observateur. En particulier, C est la *courbure tridimensionnelle observable* [9].

En ce qui concerne notre analyse des propriétés physiques du vide et de la cosmologie, il nous faut savoir de quelle manière est reliée la courbure tridimensionnelle observable C, à la courbure quadridimensionnelle K en général, et dans un espace de de Sitter en particulier. Nous aborderons ce problème par étapes successives.

Le tenseur de courbure quadridimensionnel de Riemann-Christoffel est un tenseur du 4ème ordre, et donc il possède 256 composantes, dont 20 sont en réalité significatives. Les composantes restantes sont soit nulles, ou identiques entre elles, car le tenseur de Riemann-Christoffel est :

a) Symétrique sur chaque couple d'indices $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$;
b) Antisymétrique par rapport à la permutation des indices à l'intérieur de chaque couple $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$;
c) Ses composantes sont aussi caractérisées par la propriété $R_{\alpha(\beta\gamma\delta)} = 0$, où la parenthèse ronde indique la permutation circulaire des indices (β, γ, δ).

Les composantes significatives du tenseur de Riemann-Christoffel fournissent trois tenseurs chr.inv.

$$X^{ik} = -c^2 \frac{R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i\cdot k}}{g_{00}}\,, \quad Y^{ijk} = -c\,\frac{R_{0\ldots}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad Z^{ijkl} = c^2 R^{ijkl}. \tag{5.42}$$

Le tenseur X^{ik} a 6 composantes, Y^{ijk} a 9 composantes, alors que Z^{ijkl}, a lui aussi seulement 9 composantes, en raison de sa symétrie. Les composantes du second tenseur, sont construites à partir de la propriété $Y_{(ijk)} = Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$. Substituant alors les composantes utiles du tenseur de Riemann-Christoffel [9], et après avoir abaissé les indices, on obtient

$$X_{ij} = \frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t} - \left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)\left(D_{jl} + A_{jl}\right) + \frac{1}{2}\left({}^*\nabla_i F_j + {}^*\nabla_j F_i\right) - \frac{1}{c^2} F_i F_j\,, \tag{5.43}$$

$$Y_{ijk} = {}^*\nabla_i \left(D_{jk} + A_{jk}\right) - {}^*\nabla_j \left(D_{ik} + A_{ik}\right) + \frac{2}{c^2} A_{ij} F_k\,, \tag{5.44}$$

$$Z_{iklj} = D_{ik} D_{lj} - D_{il} D_{kj} + A_{ik} A_{lj} - A_{il} A_{kj} + 2 A_{ij} A_{kl} - c^2 C_{iklj}\,. \tag{5.45}$$

A partir de ces formules de Zelmanov, on voit que les composantes spatiales observables du tenseur de Riemann-Christoffel (5.45), sont directement liées au tenseur de courbure tridimensionnel observable chr.inv. C_{iklj}.

Proposons-nous de déduire maintenant une formule pour la courbure tridimensionnelle observable, dans un espace à courbure constante. Dans un tel espace, le tenseur de Riemann-Christoffel est comme dans (5.33), et donc

$$R_{0i0k} = -Kh_{ik}g_{00}\,, \tag{5.46}$$

$$R_{0ijk} = \frac{K}{c}\sqrt{g_{00}}\,(v_j h_{ik} - v_k h_{ij})\,, \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = K\Big[h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{kj} + \frac{1}{c^2}\,v_i\,(v_l h_{kj} - v_k h_{jl}) + \\ + \frac{1}{c^2}\,v_j\,(v_k h_{il} - v_l h_{ik})\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Ayant déduit ses projections chr.inv. (5.42), on obtient

$$X^{ik} = c^2 K h^{ik}, \quad Y^{ijk} = 0\,, \quad Z^{ijkl} = c^2 K\left(h^{ik}h^{jl} - h^{il}h^{jk}\right), \tag{5.49}$$

ainsi, les composantes spatiales observables munies d'indices inférieurs, sont

$$Z_{ijkl} = c^2 K\,(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\,. \tag{5.50}$$

Contractant cette quantité de proche en proche, il vient

$$Z_{jl} = Z^{i\cdots}_{\cdot jil} = 2c^2 K h_{jl}\,, \qquad Z = Z^j_j = 6c^2 K\,. \tag{5.51}$$

Par ailleurs, nous connaissons la formule de Z_{ijkl}, dans un espace à courbure arbitraire (5.45). La formule contient la courbure tridimensionnelle observable, et est manifestement vérifiée aussi pour $K = conste$. En contractant la formule générale (5.45), on a

$$Z_{il} = D_{ik}D^k_l - D_{il}D + A_{ik}A^{\cdot k}_{l\cdot} + 2A_{ik}A^{k\cdot}_{\cdot l} - c^2 C_{il}\,, \tag{5.52}$$

$$Z = h^{il}Z_{il} = D_{ik}D^{ik} - D^2 - A_{ik}A^{ik} - c^2 C\,. \tag{5.53}$$

Dans un espace à courbure constante, $Z = 6c^2 K$ (5.51), et l'on aura pour cet espace, la relation entre la 4-courbure K, et la courbure tridimensionnelle observable C

$$6c^2 K = D_{ik}D^{ik} - D^2 - A_{ik}A^{ik} - c^2 C\,. \tag{5.54}$$

On voit qu'en l'absence de rotation d'espace et de déformations, la courbure quadridimensionnelle est de signe opposé à la courbure tridimensionnelle observable. Pour les espaces de de Sitter (absence de rotation et déformation), on aura

$$K = -\frac{1}{6}\,C\,, \tag{5.55}$$

et donc la courbure tridimensionnelle observable est $C = -6K$.

A présent, nous sommes en mesure d'élaborer un modèle pour décrire le développement de notre Univers, en se basant sur deux faits expérimentaux : a) le signe de la densité de matière observable ; b) le signe de la courbure tridimensionnelle observable.

En premier lieu, notre expérience quotidienne montre que la densité de matière si éparpillée qu'elle soit, est positive. Afin que la densité du vide (5.37) soit positive, le terme cosmologique doit être négatif $\lambda < 0$, (forces non newtoniennes attractives), et donc la courbure quadridimensionnelle devrait être négative $K < 0$.

En second lieu, selon la réponse d'Ivanenko au discours de Mc Vittie [38], dans sa préface à l'édition russe du livre de Weber [29] :

> "En dépit du manque d'exactitude évidente des observations cosmologiques, Mc Vittie maintient que les meilleurs résultats observationnels du "red shift" de Hubble à $H \approx 75$ km/sec Mpc, et une densité de matière moyenne $\rho \approx 10^{-31}$ g/cm^3, confirment la non disparition du terme cosmologique $\lambda < 0$".

Il en résulte que la densité du vide dans notre Univers est positive, avec une courbure tridimensionnelle observable $C > 0$. Par suite, la courbure quadridimensionnelle $K < 0$, et donc le terme cosmologique $\lambda < 0$. A partir de (5.37), on obtient alors la densité observable du vide

$$\breve{\rho} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{3K}{\varkappa} = \frac{C}{2\varkappa} > 0\,, \tag{5.56}$$

de sorte que la pression inflationnaire du vide est négative $\breve{p} = -\breve{\rho}c^2$ (le vide se dilate). Du fait que la distribution homogène de matière dans l'Univers fait partie des propriétés physiques du vide, la pression inflationnaire négative du vide implique aussi l'expansion de l'Univers dans son ensemble.

Par conséquent, l'espace tridimensionnel observable de notre Univers ($C > 0$), est une sphère tridimensionnelle en expansion, qui est un sous espace de l'espace-temps quadridimensionnel ($K < 0$, c'est-à-dire un espace dont la géométrie est un cas généralisé de la géométrie de Lobachewski-Bolyai).

Naturellement, un espace de de Sitter n'est qu'une simple approximation de notre Univers. Les données astronomiques révèlent que les "ilôts ou amas de matière", épars, n'affectent nullement la courbure globale, mais à leur voisinage immédiat, leurs effets deviennent significatifs (déviation des rayons lumineux, et effets semblables). Au cours de notre étude portant sur l'Univers dans son ensemble, on pourra négliger l'influence de ces "îlots" de substance, et autres hétérogénéités locales, sur la courbure. Dans ces cas particuliers, on admettra que l'espace de de Sitter à courbure quadridimensionnelle négative (courbure tridimensionnelle observable positive), constitue le fondement de notre Univers.

§ 5.4 Le concept de l'inversion. L'explosion de l'Univers

A partir du paragraphe précédent 5.3, on sait que dans l'espace de de Sitter $\lambda = 3K$, où du point de vue physique, le terme λ est identifié à sa courbure. Pour un sous espace sphérique à 3 dimensions, la courbure observable $C = -6K$, est égale à

$$C = \frac{1}{R^2}\,, \tag{5.57}$$

où R est le rayon de courbure observable (rayon de la sphère). Alors, la courbure quadridimensionnelle de de Sitter est

$$K = -\frac{1}{6R^2}\,, \tag{5.58}$$

c'est-à-dire, que plus le rayon de la sphère est grand, plus petite sera la courbure K.

Selon les estimations astronomiques les plus récentes, il est admis que notre Univers a émergé il y a $10 \div 20$ milliards d'années. A l'aube de l'Univers, depuis son apparition, un photon aura ainsi parcouru $R_H \approx 10^{27} \div 10^{28}$ cm. Cette distance est connue sous le nom de *rayon de l'horizon des évènements.*

Considérant que notre Univers dans son ensemble, est un espace de de Sitter, où $K < 0$, on estime que le rayon de courbure quadridimensionnel, et donc, avec le terme $\lambda = 3K$, doit avoir la forme

$$K = -\frac{1}{6R_H^2} \approx -10^{-56}\ \mathrm{cm}^{-2}. \tag{5.59}$$

Par ailleurs, di Bartini qui a étudié les relations entre les constantes physiques fondamentales, obtient des résultats similaires pour l'horizon, la courbure et le terme λ [39,40]. Dans ses travaux, le *rayon d'espace de l'Univers* est interprété comme la *longueur maximale*, définie du point

de vue topologique. Selon la *relation d'inversion de di Bartini*

$$\frac{R\,\rho}{r^2} = 1\,, \tag{5.60}$$

le rayon de l'espace R (longueur maximale), est l'image inversée du rayon gravitationnel de l'électron $\rho = 1.347 \times 10^{-55}$ cm, par rapport au rayon de l'inversion sphérique $r = 2.818 \times 10^{-13}$ cm, qui, selon di Bartini, est identique au rayon classique de l'électron — le rayon de l'inversion sphérique. Le rayon de l'espace (rayon maximal de l'horizon) est égal à

$$R = 5.895 \times 10^{29}\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.61}$$

Dans le contexte topologique, di Bartini définit alors la *masse d'espace* (la masse contenue dans le rayon d'espace), et la *densité d'espace*

$$M = 3.986 \times 10^{57}\,\mathrm{g}\,, \qquad \rho = 9.87 \times 10^{-34}\,\mathrm{g/cm^3}. \tag{5.62}$$

En réalité, les études toujours menées par di Bartini, nous enseignent que l'espace de l'Univers (à partir du rayon classique, jusqu'à l'horizon), est une image inversée extérieure de l'espace interne d'une certaine particule de la taille d'un électron (on peut estimer son rayon comme compris entre le rayon classique de l'électron, et son rayon gravitationnel). Selon d'autres analyses, cette particule se distingue de l'électron : sa masse serait égale à la masse de l'Univers, $M = 3.986 \times 10^{57}$ g, alors que pour l'électron, $m = 9.11 \times 10^{-28}$ g.

L'espace contenu dans cette particule ne peut pas être un espace de de Sitter. En fait, un tel espace pour lequel $K < 0$, et un rayon de courbure observable $r = 2.818 \times 10^{-13}$ cm, est caractérisé par une densité du vide égale à

$$\breve{\rho} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{1}{2\varkappa}\,r^2 = 3.39 \times 10^{51}\,\mathrm{g/cm^3}, \tag{5.63}$$

tandis que la densité à l'intérieur de la particule de di Bartini est

$$\rho = \frac{M}{2\pi^2 r^3} = 9.03 \times 10^{93}\,\mathrm{gram/cm^3}. \tag{5.64}$$

Par ailleurs, un espace extérieur, selon ses propriétés, étant l'image inversée de l'image interne, peut être lui, assimilé à un espace de de Sitter. On va donc considérer qu'un espace avec un rayon de courbure égal à celui de di Bartini $R = 5.895 \times 10^{29}$ cm, est un espace de de Sitter avec $K < 0$. Alors, la courbure quadridimensionnelle et le terme λ, sont

$$K = -\frac{1}{6R^2} = -4.8 \times 10^{-61}\,\mathrm{cm^{-2}}, \tag{5.65}$$

Stade d'évolution	Age, années	Espace rayon, cm	Densité, g/cm^3	Terme λ, cm^{-2}
Pré-particule	0	2.82×10^{-13}	9.03×10^{93}	?
Temps présent	$10\div20\times10^9$	$10^{27}\div10^{28}$	$5\div10\times10^{-30}$	$<10^{-56}$
Après expansion	623×10^9	5.89×10^{29}	9.87×10^{-34}	1.44×10^{-60}

Tableau 5.1 – Paramètres de la matière et de l'espace pour divers stades de l'évolution de l'Univers.

$$\lambda = 3K = -\frac{1}{2R^2} = -14.4\times10^{-61}\,\mathrm{cm}^{-2}, \tag{5.66}$$

c'est-à-dire qu'ils sont de cinq ordres de grandeur inférieurs aux estimations observées $|\lambda| < 10^{-56}$. On peut expliquer ce fait par l'expansion continue de l'Univers, au cours de laquelle la courbure spatiale et le terme cosmologique vont décroître pour atteindre les valeurs (5.68, 5.66), calculées pour la distance maximale (rayon de l'espace). La densité estimée du vide pour un espace de de Sitter dans le domaine compris dans cette courbure, est

$$\breve{\rho} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{3Kc^2}{8\pi G} \approx 7.7\times10^{-34}\,\mathrm{g/cm}^3. \tag{5.67}$$

Pour déterminer le temps qui reste à notre Univers pour continuer à se dilater, il suffit de définir la différence entre le rayon de l'horizon observé R_H, et le rayon de courbure R. En supposant que dans notre Univers, le rayon de l'horizon des évènements est égal au rayon d'espace (la distance d'inversion extérieure), qui, selon di Bartini, est $R = R_{H(\max)} = 5.895\times10^{29}$ cm (5.61), puis comparant avec le rayon observé de l'horizon ($R_H \approx 10^{27}\div10^{28}$ cm), on obtient $\Delta R = R_{H(\max)} - R_H \approx 5.8\times10^{29}$ cm, d'où le temps qui reste pour l'expansion de notre Univers

$$t = \frac{\Delta R}{c} \approx 600 \text{ milliards d'année.} \tag{5.68}$$

Ces calculs qui se rapportent à la densité du vide, et à d'autres propriétés de l'espace de de Sitter, ont permis de conclure sur l'origine et l'évolution de notre Univers, en autorisant la seule interprétation tangible de la relation d'inversion de di Bartini. Nous l'appellerons donc, le *Concept cosmologique de l'Inversion Explosion.* Les paramètres de la matière suivant les stades d'évolution de l'Univers, sont rassemblés dans le tableau 5.1 — la pré-particule avant l'Inversion-Explosion, le stade actuel de l'inversion expansion, et le stade postérieur à l'expansion.

Les raisons relatives à cette transition topologique qui a conduit à l'inversion sphérique de la matière à partir de la pré-particule, (après son Inversion-Explosion), restent inconnues... au même titre que les raisons inhérentes à l'émergence de l'Univers, dans le cadre conceptuel de certaines cosmologies contemporaines, comme par exemple, le fameux Big-Bang, à partir de l'origine d'un point singulier.

§ 5.5 Forces gravitationnelles non newtoniennes

En dehors des "îlots de matière" occasionnels, les espaces d'Einstein du type I, ainsi que les espaces à courbure constante, peuvent être soit vides, soit emplis de matières homogènes. Un espace vide d'Einstein du type I, (sa courbure $K=0$), est radicalement différent des espaces non vides ($K = conste \neq 0$).

Pour concrétiser notre propos, examinons l'exemple des espaces d'Einstein vides, et non vides, de type I.

A cet effet, on peut envisager l'existence d'amas, sous la forme d'une boule (distribution de la matière à symétrie sphérique), situés dans la vacuité, et dont le champ de gravitation newtonien va engendrer dans cet espace, une courbure non constante. A de grandes distances de cet amas, l'espace peut être considéré comme plan, c'est dire qu'il est caractérisé par la courbure constante particulière $K=0$. L'exemple typique d'un champ gravitationnel produit par un amas à symétrie sphérique, est décrit par la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right), \tag{5.69}$$

où r est la distance de l'amas, r_g est son rayon gravitationnel.

Un tel espace est dépourvu de rotation ou déformations. Les composantes du vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle (1.38) relatives à ce type d'espace, peuvent être obtenues comme suit.

Selon la métrique (5.69), la composante g_{00} est

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \tag{5.70}$$

puis, différentiant le potentiel de gravitation $\mathrm{w} = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$ par rapport à x^i, on obtient

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \tag{5.71}$$

Substituant cette valeur dans l'expression de la force d'inertie gravi-

tationnelle (1.38), en l'absence de rotation d'espace, il vient

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\,, \qquad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}\,. \tag{5.72}$$

Par suite, dans un espace de Schwarzschild, le vecteur F^i décrit une force de gravitation newtonienne, qui est inversement proportionnelle au carré de la distance r de la masse gravitante.

Si un espace empli par une distribution de vide à symétrie sphérique, exclut tout amas matériel, sa courbure sera partout la même. L'exemple d'un tel champ, est celui décrit par la métrique de de Sitter*

$$ds^2 = \left(1-\frac{\lambda r^2}{3}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{\lambda r^2}{3}} - r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{5.73}$$

Rappelons que malgré l'absence de masses, l'espace de de Sitter engendre des champs de gravitation newtoniens. Considérant alors un espace de de Sitter, on peut considérer le mouvement de petites particules d'épreuve, dont les champs newtoniens sont faibles et donc négligeables.

Tout espace muni d'une métrique de de Sitter, est à courbure constante et se réduit à l'espace plan, en l'absence de champs-λ. Aucune rotation ou déformations n'y sont présentes, et les composantes du vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle, sont

$$F_1 = \frac{\lambda c^2}{3}\frac{r}{1-\frac{\lambda r^2}{3}}\,, \qquad F^1 = \frac{\lambda c^2}{3}\,r\,, \tag{5.74}$$

de sorte que dans l'espace de de Sitter, le vecteur F^i décrit des forces gravitationnelles non newtoniennes, proportionnelles à r: si $\lambda<0$, elles sont attractives, et si $\lambda>0$, elles sont répulsives. Par suite, les forces de gravitation d'origine non newtonienne, (forces-λ), s'accroissent le long de la distance sur laquelle elles agissent.

Par conséquent, on perçoit immédiatement la différence existant entre les espaces d'Einstein du type I, vides, et non vides. Dans l'espace vide, occupé par un amas de matière, seules existent les forces newtoniennes, tandis que dans les espaces associés au vide sans amas,

*Selon les toutes dernières études [41], la métrique d'espace de de Sitter (5.73), satisfait la condition de symétrie sphérique, pour le cas limite où $\lambda=0$, alors que dans le cas habituel où $\lambda\neq 0$, cette même condition est vérifiée par l'espace de de Sitter, lorsque son volume est nul (c'est-à-dire que l'espace de de Sitter est dégénéré en ce point). Il en résulte qu'un espace de de Sitter usuel (où l'espace est vide avec $\lambda\neq 0$), ne possède pas la symétrie sphérique.

ne sont présentes, que les forces gravitationnelles non newtoniennes. Citons l'exemple d'un espace mixte du type I, qui est celui de la métrique de Kottler [42]

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \left(1+\frac{ar^2}{3}+\frac{b}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{ar^2}{3}+\frac{b}{r}} - r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \\ F_1 &= -\,c^2\,\frac{\frac{ar}{3}-\frac{b}{2r^2}}{1+\frac{ar^2}{3}+\frac{b}{r}}\,, \qquad\qquad F^1 = -\,c^2\left(\frac{ar}{3}-\frac{b}{2r^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

où les deux forces-λ, et newtoniennes coexistent. Il est associé au vide, et contient des "îlots" de matière, qui vont produire des forces de gravitation d'origine newtonienne.

On observe tout de même, que Kottler a inclut dans sa métrique, deux constantes inconnues a et b, qui doivent servir à déterminer la nature des contraintes supplémentaires. De ce fait, et en dépit de ses caractéristiques intéressantes, la métrique de Kottler ne présente que deux cas limites utiles : la métrique de Schwarzschild (forces gravitationnelles newtoniennes), et la métrique de de Sitter (forces-λ — forces de gravitation non newtoniennes).

§ 5.6 Collapse gravitationnel

De toute évidence, la représentation de notre Univers, que ce soit par un espace de de Sitter (vide et sans amas), ou par un espace de Schwarzschild (matière contenue dans la vacuité), ne constitue qu'une approximation. On conçoit aisément que la métrique "réelle" de notre monde, doit se situer "quelque part", entre les deux modèles. Néanmoins, pour les problèmes où l'on a affaire à une gravitation non newtonienne (produite par le vide), c'est-à-dire où l'influence des masses concentrées peut être négligée, la métrique de de Sitter se révèle optimale. Inversement, partout où les champs gravitationnels sont produits par les masses concentrées, la métrique de Schwarzschild est la plus appropriée pour résoudre ce type de problème. On peut facilement illustrer cette répartition, par le phénomène du collapse — un état caractérisé par $g_{00}=0$.

Le potentiel de gravitation w pour une métrique arbitraire est (1.38). Alors

$$g_{00} = \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 = 1-\frac{2\mathrm{w}}{c^2}+\frac{\mathrm{w}^2}{c^4}\,, \tag{5.76}$$

et le collapse $g_{00}=0$, apparaît donc pour $\mathrm{w}=c^2$.

Le *collapse gravitationnel* est habituellement envisagé comme la compression d'un amas de matière, sous l'action de la gravitation newtonienne, jusqu'à ce que la masse atteigne un point de dimension infinitésimale, égale à son rayon gravitationnel.

Le collapse gravitationnel proprement dit, apparaît dans un espace dont la métrique est celle de Schwarzschild (5.69), car la vacuité n'est alors occupée que par des amas de matière à symétrie sphérique produisant un champ newtonien.

Loin de ces concentrations de matières, le champ gravitationnel devient faible, de sorte que la loi de Newton s'applique. Dans le champ de gravitation newtonien, le potentiel est

$$\mathrm{w} = \frac{GM}{r}\,, \tag{5.77}$$

où G est la constante de gravitation de Gauss, M est la masse de la matière concentrée produisant le champ gravitationnel. En raison de la faible valeur du champ, le troisième terme dans (5.76) est négligeable, et la formule pour g_{00}, devient

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}\,, \tag{5.78}$$

il s'ensuit que le collapse gravitationnel dans un espace de Schwarzschild, apparaît si

$$\frac{2GM}{c^2 r} = 1\,, \tag{5.79}$$

où la quantité

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}\,, \tag{5.80}$$

qui a les dimensions d'une longueur, est connue sous le nom de *rayon gravitationnel* de l'amas compact. Ainsi, g_{00} peut être écrit sous la forme

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}\,. \tag{5.81}$$

On peut alors voir que le collapse se produit dans un espace de Schwarzschild, pour $r = r_g$.

Dans ce dernier cas, toute la masse de l'amas à symétrie sphérique (la source des champs newtoniens), se trouve concentrée à l'intérieur du rayon gravitationnel. La surface d'une telle concentration de matière, est appelée la *sphère de Schwarzschild*. Ces objets sont également connus sous le nom de *collapsars gravitationnels*, car en deçà du rayon gravitationnel, la vitesse d'échappement est toujours supérieure à la vitesse

de la lumière, ce qui interdit toute émission lumineuse, à partir de ces objets, vers l'extérieur.

Examinant la formule (5.69), on voit aisément que dans un champ de gravitation schwarzschildien, l'espace tridimensionnel n'entre pas en rotation ($g_{0i}=0$), d'où un intervalle de temps observable (1.25), qui s'écrit

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt = \sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\; dt\,. \tag{5.82}$$

Donc, à la distance $r=r_g$, cet intervalle de temps observable est nul $d\tau=0$: du point de vue d'un observateur extérieur, le temps à la surface de la sphère de Schwarzschild s'arrête*. A l'intérieur de la boule schwarzschildienne, l'intervalle de temps observable devient imaginaire. On s'assure sans peine, qu'un observateur habituel résidant à la surface de la terre, se tient toujours à l'extérieur de sa sphère de Schwarzschild dont le rayon est 0.0443 cm, et ne peut voir le processus du collapse gravitationnel, qu'en étant situé "extérieurement".

Si $r=r_g$, alors, la quantité

$$g_{11} = -\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}} \tag{5.83}$$

augmente indéfiniment. Mais le déterminant du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ étant

$$g = -r^4 \sin^2\theta < 0\,, \tag{5.84}$$

la région d'espace-temps à l'intérieur d'un effondrement gravitationnel, est généralement non dégénérée, même si ce collapse est toujours possible dans un zéro-espace.

Il convient ici de faire quelques remarques concernant la densité photométrique et la distance métrique observable.

La quantité r n'est pas une distance métrique le long de l'axe $x^1=r$, car la métrique (5.69) contient dr^2 avec le coefficient $\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}$. La gran-

*Pour $g_{00}=0$ (collapse), un intervalle de temps observable (1.25), est $d\tau = -\frac{1}{c^2}\, v_i\, dx^i$, où $v_i = -c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$ est la vitesse linéaire de rotation d'espace (1.37). En supposant seulement $g_{0i}=0$, et $v_i=0$, la condition du collapse peut être définie de manière plus correcte : pour tout observateur, l'écoulement du temps observable s'arrête à la surface d'un collapsar ($d\tau=0$), alors qu'un intervalle quadridimensionnel est $ds^2 = -d\sigma^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$. On peut tirer ici une simple conclusion : à la surface d'un collapsar, l'espace est holonome, et celui-ci n'est pas en rotation.

Ainsi qu'il a été démontré [19], un espace-temps complètement dégénéré (aussi appelé zéro-espace, où $ds=0$, $d\tau=0$, $d\sigma=0$ sont satisfaits), s'effondre, seulement s'il n'est pas en rotation. Nous venons de démontrer ici un théorème plus général : si $g_{00}=0$, l'espace est holonome qu'il soit dégénéré ($g=0$, zéro-espace), ou pour $g<0$ (espace-temps de la relativité générale).

deur r est une *distance photométrique*, définie comme étant fonction de l'illuminance (ou encore "irradiance"), produite par une source lumineuse stable, proportionnelle au carré de la distance. En d'autres termes, r est le rayon d'une sphère non euclidienne, dont la surface est $4\pi r^2$ [9].

Selon la théorie des invariants chronométriques (grandeurs observables en relativité générale), une distance métrique élémentaire entre deux points d'un espace de Schwarzschild, est

$$d\sigma = \sqrt{\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}\,. \tag{5.85}$$

Pour $\theta = conste$, et $\varphi = conste$, cette distance devient

$$\sigma = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{h_{11}}\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} \tag{5.86}$$

qui est manifestement différente de la distance photométrique r.

Définissons à présent la métrique d'espace-temps à l'intérieur d'une sphère de Schwarzschild. Pour ce faire, nous formulons la métrique extérieure (5.69) pour un rayon $r < r_g$. Il en résulte

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r_g}{r} - 1} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{5.87}$$

Introduisant les notations $r = c\tilde{t}$, et $ct = \tilde{r}$, on obtient

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} - \left(\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2 - c^2 d\tilde{t}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{5.88}$$

et l'on voit que la métrique d'espace-temps à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, est semblable à la métrique extérieure, pourvu que la coordonnée temporelle et la coordonnée spatiale r, échangent leur rôles respectifs : la distance photométrique r, à l'extérieur du collapsar gravitationnel, devient la coordonnée temporelle $c\tilde{t}$ à l'intérieur, tandis qu'à l'extérieur du collapsar gravitationnel, la coordonnée temporelle ct est la distance photométrique $\tilde{r}$ à l'intérieur.

En examinant le premier terme de la métrique intérieure de Schwarzschild (5.88), on constate qu'elle n'est pas stationnaire, et cet espace possède une durée de vie limitée

$$\tilde{t} = \frac{r_g}{c}\,. \tag{5.89}$$

Pour le soleil, dont le rayon gravitationnel est 3 km, le laps de temps correspondant, serait approximativement $< 10^{-5}$ s. Pour la terre, dont le rayon gravitationnel est 0.443 cm, la durée de vie de la métrique de Schwarzschild, serait inférieure à 1.5×10^{-11} s.

Comparant alors les métriques à l'intérieur d'un collapsar gravitationnel (5.88) et à l'extérieur du corps effondré (5.69), implique que :

a) L'espace des deux métriques est holonome, sans rotation ($A_{ik}=0$) ;
b) La métrique extérieure est stationnaire, le vecteur de la force d'inertie gravitationnelle est $F^1 = -\frac{GM}{r^2}$;
c) La métrique intérieure est instationnaire, le vecteur de la force d'inertie gravitationnelle est nul.

Explicitons davantage les métriques extérieure et intérieure. Afin de simplifier l'analyse, on supposera $\theta = conste$, et $\varphi = conste$, limitant ainsi notre étude aux distances radiales. La métrique extérieure s'écrira donc

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r_g}{r} - 1}\,, \tag{5.90}$$

tandis que pour la métrique intérieure, on aura

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} - \left(\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2. \tag{5.91}$$

Maintenant, nous définirons la distance physiquement observable (5.86) à la masse attractive (à savoir — le collapsar gravitationnel)

$$\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \sqrt{r\,(r - r_g)} + r_g \ln\left(\sqrt{r} + \sqrt{r - r_g}\right) + conste \tag{5.92}$$

le long de la distance radiale r. Nous voyons ici, que pour $r = r_g$, la distance observable est

$$\sigma_g = r_g \ln\sqrt{r_g} + conste, \tag{5.93}$$

dont la valeur reste constante.

Cela signifie que pour un observateur extérieur, une sphère de Schwarzschild, définie par un rayon photométrique r_g, est une sphère de rayon observable $\sigma_g = r_g \ln\sqrt{r_g} + conste$ (5.93). Par suite, pour un observateur extérieur, tout collapsar gravitationnel est une sphère à courbure constante observable, à la surface de laquelle le temps s'arrête.

Analysons maintenant les domaines intérieurs d'un collapsar gravitationnel. A l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, un intervalle de

temps observable (5.82) se révèle imaginaire pour un observateur extérieur

$$d\tau = i\sqrt{\frac{r_g}{r} - 1}\; dt\,, \tag{5.94}$$

ou bien, dans les coordonnées "intérieures" $r = c\tilde{t}$, et $ct = \tilde{r}$ (du point de vue d'un observateur "interne"),

$$d\tilde{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1}}\, d\tilde{t}\,. \tag{5.95}$$

Par conséquent, pour l'observateur extérieur, le temps intérieur "imaginaire" du collapsar (5.94), s'arrête à sa surface, tandis que l'observateur "interne", voit la durée de son temps observable, croître indéfiniment.

Donc, du point de vue de l'observateur extérieur, la distance physiquement observable à l'intérieur de collapsar, est, suivant la métrique pour un rayon $r < r_g$ (5.87)

$$\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - 1}} = -\sqrt{r\,(r - r_g)} + r_g \arctan\sqrt{\frac{r_g}{r} - 1} + conste, \tag{5.96}$$

ou encore, du point de vue de l'observateur interne

$$\tilde{\sigma} = \int \sqrt{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1}\; dr\,. \tag{5.97}$$

Pour $r = c\tilde{t} = r_g$, nous voyons ici que pour l'observateur extérieur, la distance observable entre deux points, converge vers une constante, alors que pour l'observateur "interne", la distance observable tend vers zéro.

En conclusion, nous allons nous efforcer de savoir quel peut être le destin des particules qui tombent radialement depuis "l'extérieur" sur une sphère de Schwarzschild.

Sa métrique extérieure est

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \quad d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt\,, \quad d\sigma = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}\,. \tag{5.98}$$

Pour des masses positives réelles, $ds^2 > 0$, pour des particules du genre lumière, $ds^2 = 0$, et pour des particules supraluminiques $ds^2 < 0$ (tachyons de masse imaginaire). Pour le mouvement radial dirigé vers le collapsar gravitationnel, ces conditions deviennent :

1) Particules massives réelles : $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 < c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2$;
2) Particules du genre lumière : $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2$;
3) Particules imaginaires — tachyons : $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 > c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2$.

Sur toute sphère de Schwarzschild, on a $r = r_g$, donc $\frac{d\tau}{dt} = 0$, ici. Ainsi, toute particule, y compris la particule du genre lumière, se fige sur cette sphère dont l'intervalle quadridimensionnel, est

$$ds^2 = -d\sigma^2 < 0\,, \tag{5.99}$$

c'est-à-dire qu'il est du genre espace. Il en résulte que les collapsars gravitationnels, sont peuplés de particules de masse au repos imaginaire.

§ 5.7 Collapse inflationnaire

Les espaces de de Sitter sont dépourvus d'amas de matière, et les champs gravitationnels newtoniens y sont absents — le collapse gravitationnel est impossible. Néanmoins, la condition $g_{00} = 0$ reste une stricte définition d'un collapse, qui n'est pas nécessairement lié aux champs newtoniens. Il s'ensuit qu'il est possible d'envisager ce collapse, dans n'importe quel espace arbitraire.

Nous allons examiner la métrique de de Sitter (5.73), qui décrit un champ de gravitation non newtonien dans un espace à courbure constante, sans matière concentrée (espace de de Sitter). Dans ce cas, le collapse peut se produire uniquement à partir de forces gravitationnelles non newtoniennes. Pour la métrique de de Sitter, (5.73), on observe que

$$g_{00} = 1 - \frac{\lambda r^2}{3}\,, \tag{5.100}$$

et donc le potentiel de gravitation $\mathrm{w} = c^2(1-\sqrt{g_{00}})$ dans un espace de de Sitter, s'écrit

$$\mathrm{w} = c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}\right). \tag{5.101}$$

Ce potentiel de gravitation d'origine non newtonienne, étant engendré par le vide, nous l'appellerons potentiel λ. Si l'espace de de Sitter est plan, le potentiel λ est nul, et donc, $\lambda = 3K = 0$. Etant donné que pour tout espace de de Sitter, $\lambda = 3K$, on aura ainsi :

1) $g_{00} = 1 - Kr^2 > 0$, pour les distances $r < \frac{1}{\sqrt{K}}$;
2) $g_{00} = 1 - Kr^2 < 0$, pour les distances $r > \frac{1}{\sqrt{K}}$;
3) $g_{00} = 1 - Kr^2 = 0$, (collapse) pour les distances $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Pour la courbure $K<0$, la valeur numérique de $g_{00}=1-Kr^2$ est toujours supérieure à zéro, et le collapse n'est donc réalisable que dans des espaces de de Sitter pour lesquels $K>0$.

Au paragraphe §5.3, nous avons montré que notre Univers dans son ensemble est caractérisé par $K<0$. Par ailleurs, on peut admettre la présence d'inhomogénéités locales pour lesquelles $K>0$, mais qui n'affectent pas la courbure de l'espace en général. C'est le cas, par exemple, du collapse qui peut apparaître sur ces inhomogénéités. On peut donc raisonnablement assimiler l'espace de de Sitter pour lequel $K>0$, à un espace local, au voisinage duquel se trouvent des objets compacts.

Dans les espaces de de Sitter, la courbure tridimensionnelle observable C, est liée à la courbure quadridimensionnelle, par la relation $C=-6K$ (5.55). En supposant que l'espace tridimensionnel observable soit une sphère, on obtient $C=\frac{1}{R^2}$ (5.57), donc, $K=-\frac{1}{6R^2}$ (5.58), où R est le rayon de courbure observable. Lorsque $K<0$, la valeur de R est réelle, mais devient imaginaire pour $K>0$.

Dans un espace de de Sitter, le collapse est seulement possible pour $K>0$. Dans ce dernier cas, le rayon de courbure observable est imaginaire, et nous poserons $R=iR^*$, où R^* est sa valeur absolue. Pour l'espace de de Sitter avec $K>0$, on aura

$$K=\frac{1}{6R^{*2}}\,, \tag{5.102}$$

et la condition du collapse $g_{00}=1-Kr^2$ peut alors s'écrire

$$r=R^*\sqrt{6}\,. \tag{5.103}$$

Par suite, à la distance $r=R^*\sqrt{6}$ dans l'espace de de Sitter où $K>0$, la condition $g_{00}=0$ est vérifiée, ce qui implique que l'écoulement du temps observable s'arrête, et donc le collapse se produit.

En d'autres termes, une région d'un espace de de Sitter dont le rayon est $r=R^*\sqrt{6}$, reste en état de collapse. Etant donné que le vide qui emplit tout espace de de Sitter, reste inflationnaire, nous appellerons ce type de processus, *collapse inflationnaire*, pour le distinguer du collapse gravitationnel (qui apparaît dans les espaces de Schwarzschild), et la valeur $r=R^*\sqrt{6}$ (5.77) sera ainsi le *rayon inflationnaire* $r_{\rm inf}$. La région "effondrée" de l'espace de de Sitter à l'intérieur du rayon inflationnaire, sera appelée *collapsar inflationnaire* ou *inflanton*.

Dans cet inflanton, nous avons $K>0$, et la courbure tridimensionnelle observable est $C<0$. Dans ce cas, la densité du vide est négative (la pression inflationnaire est positive, le vide comprime) et $\lambda>0$, de

sorte qu'il n'existe pas de forces non newtoniennes répulsives. Il s'ensuit que le collapsar inflationnaire (inflanton), est empli de vide à densité négative, et se trouve en état d'équilibre précaire, entre la pression de compression du vide, et les forces d'expansion de la gravitation non newtonienne.

Pour l'espace de de Sitter, avec $K > 0$, on aura

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt = \sqrt{1 - Kr^2}\; dt = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}}\; dt\,, \tag{5.104}$$

et donc, à la surface de la sphère inflationnaire, l'écoulement du temps observable s'arrête $d\tau = 0$. La signature adoptée $(+---)$, c'est-à-dire la condition $g_{00} > 0$, reste vraie pour $r < r_{\text{inf}}$.

Avec la notation du "rayon inflationnaire", il est loisible d'exprimer la métrique de de Sitter avec $K > 0$, sous la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{5.105}$$

de sorte que les composantes du vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle (5.74), s'écrivent

$$F_1 = \frac{c^2}{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}}\, \frac{r}{r_{\text{inf}}^2}\,, \qquad F^1 = c^2\, \frac{r}{r_{\text{inf}}^2}\,. \tag{5.106}$$

Déduisons maintenant les formules pour les distances observables et le rayon inflationnaire dans un inflanton. Une fois encore, pour faciliter les calculs, nous supposerons ici $\theta = conste$, et $\varphi = conste$, pour ne considérer que les distances radiales. Alors, un intervalle tridimensionnel observable arbitraire s'écrit

$$\sigma = \int \sqrt{h_{11}}\, dr = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = r_{\text{inf}} \arcsin \frac{r}{r_{\text{inf}}} + conste, \tag{5.107}$$

donc, le rayon inflationnaire observable est constant

$$\sigma_{\text{inf}} = \int_0^{r_{\text{inf}}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \frac{\pi}{2}\, r_{\text{inf}}\,. \tag{5.108}$$

Dans un espace muni d'une métrique de Schwarzschild qui a été envisagé au paragraphe précédent §5.6, un collapsar représente l'effondrement gravitationnel d'une masse compacte, qui engendre la courbure de l'espace dans son ensemble. L'observateur régulier d'un espace de

Schwarzschild demeure toujours à l'extérieur du collapse gravitationnel.

Dans un espace de de Sitter, un collapsar doit être par sa nature, considéré comme un vide qui emplit tout l'espace. Ici, la région du collapse est comparable à une surface, dont le rayon est égal au rayon de courbure de l'espace. Par suite, un observateur régulier de l'espace de de Sitter est situé sous la surface du collapsar inflationnaire, région à partir de laquelle il "voit".

Afin de se représenter l'intérieur d'un collapsar inflationnaire, nous exprimerons la métrique de de Sitter avec $K > 0$ (5.105), pour $r > r_{\text{inf}}$. Considérant les directions radiales dans les coordonnées d'un observateur régulier (coordonnées "internes" du collapsar), on trouve

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1}, \tag{5.109}$$

ou encore, du point de vue d'un observateur situé à l'extérieur du collapsar (dans ses coordonnées extérieures $r = c\tilde{t}$, et $ct = \tilde{r}$), il vient

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{c^2\tilde{t}^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1} - \left(\frac{c^2\tilde{t}^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1\right) d\tilde{r}^2. \tag{5.110}$$

§ 5.8 Conclusions

Pour de faibles valeurs de matière (densité observée de $\sim 10^{-30}\,\text{g/cm}^3$), dans la Métagalaxie, (c'est-à-dire dans un espace presque vide), on peut admettre que le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, et les équations d'Einstein sont alors dans ce cas $R_{\alpha\beta} = k\, g_{\alpha\beta}$, où $k = conste$. En répertoriant les types d'espaces d'Einstein, Gliner [33,34], a mis en évidence un type particulier $T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}$, où $\mu = conste$, est la densité de matière. Ce tenseur caractérise l'"état du vide de la matière" qui est encore appelé le vide-μ. Gliner a ensuite montré qu'un espace "empli" d'un vide-μ, est un espace d'Einstein.

Nous avons déjà souligné la signification profonde du tenseur d'énergie-impulsion du vide $\breve{T}_{\alpha\beta} = \lambda\, g_{\alpha\beta}$, et celui du vide-$\mu$, $T_{\alpha\beta} = \mu\, g_{\alpha\beta}$, et nous avons pu en déduire les expressions mathématiques pour les propriétés observables de ces milieux, à savoir, les densités, les densités d'impulsion, et les tenseurs des contraintes : le vide a pu être ainsi identifié à un milieu homogène non radiatif, dépourvu de viscosité, et en état inflationnaire (expansion à densité positive). Suivant des études menées par Petrov et Gliner, et compte tenu des propriétés physiques du vide, nous avons suggéré une classification géométrique de la matière, en fonc-

tion du tenseur d'énergie-impulsion — la *classification T* :

— Vacuité d'espace-temps, condition qui apparaît, lorsque le tenseur d'énergie-impulsion de la matière est nul ($T_{\alpha\beta} = 0$), et lorsque la gravitation non newtonienne est absente ($\lambda = 0$) ;

— Vide, condition où la matière est absente ($T_{\alpha\beta} = 0$), mais avec une gravitation non newtonienne ($\lambda \neq 0$) ;

— Substance, $T_{\alpha\beta} \neq 0$, $T_{\alpha\beta} \nsim g_{\alpha\beta}$ (comprenant la matière ordinaire, et le champ électromagnétique).

Les expérimentations routinières, démontrent que notre Univers, possède une densité de matière positive. Pour une densité positive du vide, le terme cosmologique $\lambda < 0$, (forces de gravitation non newtoniennes répulsives), et sa pression inflationnaire est négative (Univers en expansion).

En étudiant des espaces associés au vide (aucune substance), tels que l'espace de de Sitter, nous avons trouvé que la condition du collapse ($g_{00} = 0$) est réalisée dans ce cas par une surface effondrée (objet), appelée *collapsar inflationnaire*, ou *inflanton*. A l'intérieur d'un inflanton, $\lambda > 0$, la densité du vide est négative, la pression positive, et les forces de gravitation non newtoniennes qui sont répulsives, réalisent avec l'inflanton, un équilibre entre la pression du vide, et les forces d'expansion de la gravitation non newtonienne.

Chapitre 6 L'Univers miroir

§ 6.1 Le concept de l'Univers miroir

Ainsi que nous l'avons mentionné au §5.1, les tentatives de représentation de notre Univers et de l'Univers miroir, comme deux espaces à courbures positive et négative, ont toutes échouées, même dans le cas de la métrique de de Sitter, qui reste pourtant la plus simple des métriques d'espace-temps ; les trajectoires dans un espace à courbure positive, sont substantiellement différentes de celles de son jumeau à courbure négative (voir chapitre VII, dans le livre de Synge [36]).

Par contre, de nombreux chercheurs à commencer par Dirac, prédirent de manière intuitive, que l'Univers miroir (aux antipodes de notre Univers), devait être recherché non pas dans notre espace pourvu d'une courbure à signe opposé, mais plutôt dans un espace où les particules possèdent des masses et énergies de signe opposé. Puisque les masses de notre Univers sont positives, celles de l'Univers miroir seront donc négatives.

Joseph Weber [29], écrivait que ni la loi de gravitation de Newton, ni la théorie de la gravitation relativiste, n'excluaient l'existence de masses négatives ; bien au contraire, notre expérience empirique témoigne du fait qu'elles n'ont jamais été observées. Les deux théories de la gravitation de Newton et d'Einstein, prévoient du reste, un comportement de masses négatives, radicalement différent de celui des charges négatives de l'électrodynamique. On s'attendrait alors, à ce que pour deux corps de masses égales, celle de signe positif attire la masse négative, tandis que cette dernière repousse la masse positive, les deux se poursuivant mutuellement ! Le mouvement le long d'une ligne joignant les centres de masses des corps considérés, serait ainsi un mouvement en accélération constante. Ce problème avait été étudié par Bondi [43]. En admettant que la masse gravitationnelle du positron soit négative (les observations actuelles montrent que sa masse inertielle est positive), Shiff a trouvé par les méthodes de l'électrodynamique quantique, qu'il existe une différence entre sa masse inertielle (masse inerte) et sa masse gravitationnelle (masse pesante). Cette différence serait plus importante que la marge d'erreur prévue dans l'expérience d'Eötvös, qui conduit au principe d'équivalence bien connu [44]. Shiff en conclut qu'une masse

gravitationnelle négative du positron ne peut exister (voir chapitre 1 dans le livre de Weber [29]).

Par ailleurs, la "cohabitation" des masses positives et négatives dans la même région d'espace-temps, devrait conduire à une annihilation continuelle. Le comportement possible de particules du genre "mixte", ayant des masses positives et négatives, ont été également étudiées par Terletskii [45, 46].

Par conséquent, la représentation d'un Univers miroir comme étant celle d'un monde avec des masses et des énergies négatives, se heurte à deux obstacles :

a) La réalisation de *l'expérience décisive* qui mettrait en évidence les interactions d'échange entre notre Univers et l'Univers miroir ;

b) L'absence d'une théorie, qui expliquerait clairement la séparation de mondes associés chacun à une masse positive et négative, et localisés dans des espaces-temps différents.

Dans ce paragraphe §6.1, nous nous proposons de résoudre la seconde partie (théorique) de ce problème.

Examinons le terme "propriétés miroir", tel qu'il s'applique à la métrique d'espace-temps. Nous écrirons d'abord le carré de l'intervalle d'espace-temps chr.inv.

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \tag{6.1}$$

où

$$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{6.2}$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2}\, v_i dx^i = \left(1 - \frac{\mathrm{w} + v_i u^i}{c^2}\right) dt\,. \tag{6.3}$$

Nous voyons ici qu'un intervalle spatial (6.2) est une fonction quadratique d'accroissements d'espaces élémentaires dx^i. Les coordonnées spatiales x^i étant toutes égales entre elles, il n'est pas possible de distinguer les mouvements suivant une direction donnée droite, gauche, vers le haut ou vers le bas.

De ce fait, il n'est donc pas utile d'envisager la réflexion des coordonnées spatiales, par contre, il en va différemment du temps. Pour un observateur régulier, le temps physiquement observable τ s'écoule toujours du passé vers l'avenir, c'est-à-dire $d\tau > 0$. Toutefois, il existe deux cas pour lesquels le temps s'arrête. C'est d'abord celui de l'espace-temps régulier en état de collapse. Cette circonstance apparaît de même dans un espace nul (zéro-espace) — l'espace-temps quadridimensionnel complètement dégénéré. Par suite, l'état d'un observateur dont le temps

observable s'arrête, peut être considéré comme transitoire, c'est-à-dire qu'il ne s'applique pas aux conditions régulières.

Nous allons donc envisager le problème de l'Univers miroir, pour $d\tau > 0$, et $d\tau = 0$. Ce dernier cas sera traité séparément pour les régions du collapse d'espace-temps, et pour l'espace nul (zéro-espace). D'après la formule relative au temps physiquement observable (6.3), il est évident que cette condition est vérifiée, si

$$\mathrm{w} + v_i u^i < c^2. \tag{6.4}$$

En l'absence de rotation d'espace, $(v_i = 0)$, cette formule devient $\mathrm{w} < c^2$, ce qui correspond à la structure de l'espace-temps en état de collapse. Par suite, ds^2 (6.1) peut être développé comme suit

$$\begin{aligned} ds^2 = \Big(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)^2 c^2 dt^2 - 2\Big(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big) v_i\, dx^i dt - \\ - h_{ik}\, dx^i dx^k + \frac{1}{c^2}\, v_i v_k\, dx^i dx^k, \end{aligned} \tag{6.5}$$

par ailleurs

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right), \qquad \mathrm{v}^2 = h_{ik}\mathrm{v}^i \mathrm{v}^k. \tag{6.6}$$

Divisons les deux membres de la formule pour ds^2 (6.5), par les quantités suivantes, selon les genres de trajectoires de la particule :

1) $c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)$ si l'intervalle d'espace-temps est réel $ds^2 > 0$;
2) $c^2 d\tau^2$ si l'intervalle d'espace-temps est nul $ds^2 = 0$;
3) $-c^2 d\tau^2 \left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 1\right)$ si l'intervalle est imaginaire $ds^2 < 0$.

Il s'ensuit que dans tous les cas, on obtient la même équation quadratique par rapport à la "coordonnée temporelle vraie" t, à partir du temps physiquement mesuré τ par l'observateur, à savoir — l'équation

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{2 v_i \mathrm{v}^i}{c^2\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)} \frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2} \left(\frac{1}{c^4}\, v_i v_k \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k - 1\right) = 0\,, \tag{6.7}$$

qui a deux solutions

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_1 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i + 1\right), \tag{6.8}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_2 = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i - 1\right). \tag{6.9}$$

L'intégration de t par rapport à τ, donne

$$t = \frac{1}{c^2}\int \frac{v_i\,dx^i}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}} \pm \int \frac{d\tau}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}} + conste \tag{6.10}$$

qui peut être facilement calculée, si l'espace n'est pas en rotation, et lorsque le potentiel de gravitation est $\mathrm{w}=0$, de sorte que l'intégrale est $t=\pm\tau + conste$. Pour un choix approprié des conditions initiales, la constante d'intégration peut être nulle. Dans ce cas, on aura

$$t = \pm\tau\,, \qquad \tau > 0\,, \tag{6.11}$$

qui représente graphiquement deux rayons réfléchis dans la réflexion miroir, par rapport à $\tau > 0$.

Nous dirons ici que le temps propre de l'observateur agit comme une "membrane" du miroir qui sépare deux mondes : l'un caractérisé par un écoulement de la coordonnée du temps direct*, du passé vers le futur $t=\tau$, et l'autre associé au miroir dont l'écoulement de la coordonnée est inversé, du futur vers le passé $t=-\tau$.

Il est à noter que l'écoulement du temps inversé ne peut en aucun cas être ici, comparé à une bande vidéo qui serait "remontée". Les deux mondes sont à peu près identiques, mais pour un observateur régulier, la coordonnée du temps dans l'Univers miroir est négative. Dans ce cas, la surface de la membrane du miroir traduit l'écoulement du temps, mais elle ne l'affecte pas.

Nous supposons que l'espace n'entre pas en rotation $v_i=0$, mais ici, le potentiel de gravitation n'est pas nul $\mathrm{w}\neq 0$. Nous aurons donc

$$t = \pm\int \frac{d\tau}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}} + conste. \tag{6.12}$$

Si le potentiel de gravitation est faible ($\mathrm{w} \ll c^2$), notre intégrale (6.12) devient

$$t = \pm\left(\tau + \frac{1}{c^2}\int \mathrm{w}\,d\tau\right) = \pm\left(\tau + \Delta t\right), \tag{6.13}$$

où Δt est une correction qui tient compte du champ w produisant l'accélération. Cette quantité w peut définir n'importe quel champ de potentiel scalaire — champ de potentiel gravitationnel newtonien ou non newtonien.

*Chaque temps physiquement observable τ de l'observateur, s'écoule partout du passé vers le futur, de sorte que $d\tau > 0$, est vrai pour n'importe quel référentiel de l'observateur.

Pour un champ gravitationnel intense engendré par le potentiel w, l'intégrale prend la forme (6.12), et dépendra donc du potentiel w : plus il est intense, et plus la coordonnée temporelle s'écoulera rapidement (6.12). Pour le cas limite où $\mathrm{w} = c^2$, on a $t \to \infty$. Par ailleurs, lorsque $\mathrm{w} = c^2$, le collapse apparaît, et $d\tau = 0$. Nous analyserons ce cas un peu plus loin, mais pour le moment nous supposons toujours $\mathrm{w} < c^2$.

Examinons la coordonnée temporelle dans les deux espaces de Schwarzchild, et de de Sitter. Si le potentiel w décrit un champ gravitationnel newtonien (espace muni d'une métrique de Schwarzchild), alors

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{GM}{c^2 r}} = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{r_g}{r}}\,, \tag{6.14}$$

qui implique que plus on s'approche du rayon gravitationnel de la masse, plus grande est la différence entre la coordonnée temporelle et le temps mesuré par l'observateur. Si w est le potentiel d'un champ gravitationnel non newtonien, (espace muni d'une métrique de de Sitter), alors

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} = \pm \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_{\mathrm{inf}}^2}}}\,, \tag{6.15}$$

qui implique maintenant, que plus la distance photométrique r mesurée est proche du rayon inflationnaire de l'espace, plus la coordonnée temporelle s'écoule rapidement. Dans le cas limite, où $r \to r_{\mathrm{inf}}$, nous aurons $t \to \infty$. Par conséquent, en l'absence de rotation d'espace, mais en présence d'un champ gravitationnel, la coordonnée temporelle s'écoule plus rapidement et le potentiel du champ devient plus intense. Cette circonstance est vérifiée pour des champs gravitationnels newtoniens et non newtoniens.

Nous allons maintenant envisager la situation plus générale, pour laquelle la rotation d'espace et les champs gravitationnels sont présents. Dans ce cas, l'intégrale pour t prend la forme (6.10), de sorte que la coordonnée temporelle dans l'espace non holonome (en rotation) contient :

a) Le temps "rotationnel", déterminé par la présence du terme $v_i dx^i$, qui a les dimensions d'un moment de rotation divisé par l'unité de masse ;

b) La coordonnée temporelle régulière, liée au rythme du temps mesuré par l'observateur.

D'après l'intégrale pour t (6.10), on voit que la coordonnée temporelle "rotationnelle", qui est induite par la rotation d'espace, existe indépendamment de l'observateur, car elle ne dépend pas de τ. Un ob-

servateur au repos à la surface de la terre, (partout, sauf aux pôles), pourra interpréter ce temps comme l'écoulement temporel consécutif à la rotation de la planète. Celui-ci existe quelque soit le lieu de la mesure de l'observateur. La coordonnée temporelle régulière est intimement liée à la fois à notre présence (qui dépend de notre temps mesuré τ), et au champ présent au point d'observation ; en particulier, au champ du potentiel newtonien.

Notons que pour $v_i \neq 0$, la coordonnée temporelle t à l'instant initial de l'observation (quand le temps mesuré par l'observateur est $\tau_0 = 0$), est non nulle.

Exprimant l'intégrale pour t (6.10) sous la forme

$$t = \int \frac{\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i \pm d\tau}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,, \tag{6.16}$$

on trouve que la quantité sous le signe intégral est :

1) Positive si $\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i > \mp d\tau$;
2) Nulle si $\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i = \pm d\tau$;
3) Négative, si $\frac{1}{c^2}\, v_i dx^i < \mp d\tau$.

Il s'ensuit que pour un observateur réel, la coordonnée temporelle se fige, si le produit scalaire de la vitesse linéaire de rotation d'espace, et de la vitesse observable de l'objet, est $v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2$. Cette égalité est vérifiée lorsque la valeurs numérique de chacune des deux vitesses est égale à celle de la lumière, et quand elles sont colinéaires de même sens ou de sens opposé.

La région de l'espace-temps dans laquelle est vérifiée $v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2$, c'est-à-dire où la coordonnée temporelle s'arrête pour un observateur réel, constitue la *membrane du miroir*, qui sépare deux régions de coordonnées temporelles, respectivement positives et négatives — régions avec des écoulements du temps direct et inversé.

Manifestement, aucun observateur régulier situé dans un laboratoire terrestre, ne peut accompagner un tel espace.

Nous appellerons *espace miroir*, une région de l'espace-temps dans laquelle la coordonnée temporelle prend des valeurs négatives. Proposons-nous d'analyser les propriétés des particules qui peuplent l'espace miroir, par rapport à celles qui composent l'espace régulier, où la composante temporelle est positive.

Le 4-vecteur impulsion de la particule massive de masse au repos non nulle m_0, est

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \tag{6.17}$$

dont les projections chr.inv. sont

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = m\frac{dt}{d\tau} = \pm\, m\,, \qquad P^i = \frac{m}{c}\,\mathrm{v}^i, \tag{6.18}$$

où le "plus" indique l'écoulement direct de la coordonnée temporelle, alors que le "moins" indique l'écoulement inversé, par rapport au temps mesuré par l'observateur. Le carré du vecteur P^α est

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta}\, P^\alpha P^\beta = m_0^2\,, \tag{6.19}$$

alors que sa longueur est égale à

$$\left|\sqrt{P_\alpha P^\alpha}\,\right| = m_0\,. \tag{6.20}$$

Par suite, toute particule de masse au repos non nulle, étant une structure quadridimensionnelle, se projette sur la ligne de temps de l'observateur, comme un dipôle consistant en une masse positive $+m$, et une masse négative $-m$. Mais, P^α, en se projetant sur la section spatiale, fait que les deux projections fusionnent en une seule — l'impulsion tridimensionnelle observable $p^i = m\mathrm{v}^i$. En d'autres termes, chaque particule douée d'une masse relativiste positive, possède son propre *jumeau-miroir*, doué lui, de la même masse négative : les deux types de particules ont uniquement des signes de masse opposés, mais leurs impulsions tridimensionnelles sont toutes deux positives.

D'une façon similaire, pour le vecteur d'onde quadridimensionnel

$$K^\alpha = \frac{\omega}{c}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} = k\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{6.21}$$

qui décrit une particule dépourvue de masse, les projections chr.inv. sont

$$\frac{K_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm k\,, \qquad K^i = \frac{k}{c}\,c^i. \tag{6.22}$$

Il s'ensuit que toute particule sans masse, étant représentable par un objet quadridimensionnel, doit exister dans deux états : particules dépourvues de masse à fréquence positive dans notre monde à écoulement temporel direct, et particules sans masse à fréquence négative, associées au monde à écoulement du temps inversé.

Nous définirons alors *l'Univers matériel*, comme étant l'espace-temps quadridimensionnel empli de substance et de champs. Etant donné que toute particule est un objet dipôle quadridimensionnel, l'Univers matériel peut être considéré comme une combinaison de l'espace-temps de base et de particules, et constitue donc aussi à ce titre un objet dipôle,

qui existe sous deux états : notre Univers, peuplé de particules de masses et de fréquences positives, et *l'Univers miroir*, dans lequel évoluent les particules de masses et fréquences négatives, tandis que leurs impulsions observables restent positives. Notons toutefois, que notre Univers et l'Univers miroir, proviennent de la même nature d'espace-temps quadridimensionnel.

A titre d'exemple, lorsque nous analysons les propriétés de l'Univers dans son ensemble, nous négligeons toujours l'action des champs newtoniens résultant des amas de substances isolés, et donc, nous admettons que le 4-espace de base de notre Univers, est un espace de de Sitter à courbure quadridimensionnelle négative, alors que la courbure tridimensionnelle observable est positive (voir §5.5). On peut ainsi supposer que notre Univers tout entier est une région de l'espace de de Sitter, pourvu d'une 4-courbure négative, et où la coordonnée temporelle est positive, en même temps que les masses et les fréquences des particules qui le composent. Inversement, l'Univers miroir est une région du même espace de de Sitter, où la coordonnée temporelle est négative, avec des particules de masses et fréquences négatives.

A l'intérieur de cet espace-temps de base, la membrane d'espace-temps qui sépare notre Univers de l'Univers miroir, empêche les deux types de particules de se rencontrer, interdisant ainsi toute annihilation. Nous analyserons en détail, la réalité de cette membrane à la fin de ce paragraphe.

Examinons maintenant la structure du dipôle se rapportant à notre Univers pour $d\tau = 0$, et pour ce faire, nous considérerons les régions effondrées dans l'espace-temps régulier, et celles d'un espace totalement dégénéré (zéro-espace).

Ainsi que nous l'avons montré, la condition $d\tau = 0$, est vraie pour un espace-temps régulier (non dégénéré), dans lequel le collapse apparaît, l'espace étant holonome (sans rotation). Alors

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt = 0\,. \tag{6.23}$$

Cette condition est vérifiée pour n'importe quel type de collapse, donc pour tout type de potentiel gravitationnel w, y compris le potentiel non newtonien. Pour $d\tau = 0$ (6.23), la métrique quadridimensionnelle est

$$ds^2 = -d\sigma^2 = -h_{ik}\, dx^i dx^k = g_{ik}\, dx^i dx^k = g_{ik}\, u^i u^k dt^2, \tag{6.24}$$

et donc, dans ce cas, la valeur absolue de l'intervalle ds est égale à

$$|ds| = i d\sigma = i\sqrt{h_{ik}\, u^i u^k}\, dt = i u dt\,, \qquad u^2 = h_{ik}\, u^i u^k, \tag{6.25}$$

de sorte que le 4-vecteur impulsion à la surface d'un collapsar s'écrit

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \qquad d\sigma = u dt\,. \tag{6.26}$$

Son carré est

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = -\, m_0^2\,, \tag{6.27}$$

par suite, la longueur du vecteur P^α (6.26) est imaginaire

$$\left|\sqrt{P_\alpha P^\alpha}\,\right| = i m_0\,. \tag{6.28}$$

Cette dernière implique en particulier que la surface du collapsar est occupée par des particules de masses au repos imaginaires. Ceci ne signifie nullement que l'on ait affaire à des particules supraluminiques (tachyons), car leurs masses au repos sont réelles, (particules régulières), leurs masses relativistes ne devenant imaginaires que lorsqu'elles sont précisément des tachyons.

A la surface de tout collapsar, le terme "vitesse observable" est dénué de sens physique car le temps mesuré par l'observateur s'arrête $d\tau = 0$.

Sur une telle surface, on peut écrire formellement les composantes du 4-vecteur impulsion de la particule (6.26), comme suit

$$P^0 = \frac{m_0 c}{u}\,, \qquad P^i = \frac{m_0}{u}\, u^i. \tag{6.29}$$

En réalité, il est impossible d'observer une telle particule, car à la surface d'un collapsar, notre temps observable se fige. Par ailleurs, la vitesse $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ déduite, se rapportant à la coordonnée, ne dépend pas du temps mesuré par l'observateur qui s'arrête ici. On peut donc interpréter le vecteur spatial $P^i = \frac{m_0}{u} u^i$, comme la coordonnée de l'impulsion de la particule, tandis que la quantité $\frac{m_0 c^3}{u}$ sera interprétée comme étant son énergie. Cette dernière ne possède seulement qu'un signe, de sorte que la surface de n'importe quel collapsar, représentée par une région quadridimensionnelle, n'est pas un objet dipôle à quatre dimensions, qui peut se traduire par la présence de jumeaux-miroir. Indépendamment de leur nature newtonienne ou non newtonienne, la surface d'un collapsar n'existe que dans un seul état.

Par contre, la surface d'un collapsar ($g_{00} = 0$) peut être considérée comme une membrane, qui sépare les régions quadridimensionnelles de l'espace-temps, avant et après le processus de collapse. Avant le collapse, on a $g_{00} > 0$, donc τ est réel. Après le collapse, on a $g_{00} < 0$ et τ devient imaginaire. Lorsque l'observateur pénétrant le collapsar traverse la surface, son temps mesuré est soumis à une rotation de 90°, ce qui a pour

effet d'échanger son rôle avec les coordonnées spatiales.

Le terme particules "du genre lumière", est également ici dénué de sens physique à la surface d'un collapsar, car pour celles-ci, on a $d\sigma = cd\tau$, et donc à la surface ($d\tau = 0$), pour ce type de particules

$$u = \sqrt{h_{ik}\, u^i u^k} = \sqrt{\frac{h_{ik}\, dx^i dx^k}{dt^2}} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{cd\tau}{dt} = 0\,. \tag{6.30}$$

Le temps observable mesuré s'arrête aussi $d\tau = 0$, dans un espace-temps totalement dégénéré (zéro-espace). Ici, par définition, les conditions $d\tau = 0$, et $d\sigma = 0$ sont vérifiées. Ainsi, comme nous l'avons montré dans notre étude [19], les conditions de dégénérescence peuvent être écrites comme suit

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \qquad g_{ik}\, u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2. \tag{6.31}$$

Les particules présentes dans l'espace-temps dégénéré (zéro-particules), possèdent une masse relativiste nulle $m = 0$, mais une masse M (1.71) différente de zéro, et donc une impulsion non nulle à signe constant

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)}\,, \qquad p^i = M u^i. \tag{6.32}$$

Par conséquent, les jumeaux-miroir ne peuvent se trouver dans la matière régulière -particules avec ou sans masse qui ne soient pas en état de collapse. Les objets effondrés dans l'espace-temps régulier (y compris les collapsars gravitationnels), sont des objets communs à notre Univers et à l'Univers miroir. Les objets du zéro-espace qui ne possèdent pas la propriété des dipôles miroir, se situent en dehors de l'espace-temps de base, en raison de la dégénérescence totale de la métrique. Il est toutefois possible d'entrer dans des "zones neutres" à la surface des objets effondrés de l'espace régulier, et du zéro-espace, soit à partir de notre Univers, (coordonnée temporelle positive), soit à partir de l'Univers miroir (coordonnée temporelle négative).

§ 6.2 Condition de passage à travers la membrane vers l'Univers miroir

Nous devons maintenant traiter de la question de la membrane séparant notre Univers de l'Univers miroir, dans l'espace-temps de base, qui interdit donc l'annihilation des particules de masses positive et négative.

Dans notre Univers, $dt > 0$, et pour l'Univers miroir $dt < 0$. Par suite, la membrane est une région de l'espace-temps où $dt = 0$, c'est-à-dire que

la coordonnée temporelle se fige. Pour cette région, on aura

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\,v_i\mathrm{v}^i \pm 1\right) = 0\,, \tag{6.33}$$

qui peut être aussi exprimé comme la condition physique

$$dt = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\,v_i dx^i \pm d\tau\right) = 0\,. \tag{6.34}$$

Cette dernière notation est plus générale, car elle ne s'applique pas seulement à l'espace-temps de la relativité générale, mais à un espace-temps étendu, qui autorise la dégénérescence totale de la métrique.

Les conditions à l'intérieur de la membrane ($t = conste$, d'où $dt = 0$), selon (6.34), sont définies par la formule

$$v_i dx^i \pm c^2 d\tau = 0\,, \tag{6.35}$$

qui peut être aussi écrite

$$v_i\mathrm{v}^i = \pm\, c^2. \tag{6.36}$$

Cette condition peut s'exprimer sous la forme

$$v_i\mathrm{v}^i = \left|v_i\right|\left|\mathrm{v}^i\right| \cos\left(v_i;\mathrm{v}^i\right) = \pm\, c^2. \tag{6.37}$$

Nous voyons ici que cette condition est vérifiée, si la valeur numérique de chacune des vitesses v_i et v^i est égale à celle de la lumière, et si elles sont colinéaires de même sens ("plus"), ou de sens opposé ("moins").

Par conséquent, du seul point de vue physique, la membrane se présente comme un espace qui est soumis à des mouvements de translation à la vitesse de la lumière, et qui, simultanément entre en rotation à cette même vitesse, de sorte que celle-ci va représenter un monde de trajectoires hélicoïdales du genre lumière. Il est alors possible qu'un tel espace soit attribué aux particules douées de propriétés d'hélicité (par exemple, particules sans masse du genre lumière-photons).

En ayant substitué $dt = 0$, dans la formule pour ds^2, on obtient la métrique à l'intérieur de la membrane

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k, \tag{6.38}$$

qui est semblable à celle de la surface d'un collapsar. Etant donné qu'il s'agit d'un cas particulier d'une métrique d'espace-temps de signature $(+---)$, ds^2 est toujours positif. Il s'ensuit que dans une région du 4-espace-temps, qui constitue la membrane séparant notre Univers de

l'Univers miroir, l'intervalle quadridimensionnel est du genre espace. La différence avec la métrique du genre espace à la surface du collapsar (6.24), réside essentiellement dans le fait qu'il n'y a pas de rotation d'espace et donc $g_{ik} = -h_{ik}$, tandis que dans le cas considéré ici, $g_{ik} = -h_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ (1.18). En d'autres termes, à l'intérieur de la membrane, nous aurons

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = -\, h_{ik}\, dx^i dx^k + \frac{1}{c^2}\, v_i v_k\, dx^i dx^k, \tag{6.39}$$

de sorte que la métrique quadridimensionnelle devient ici du genre espace due à la rotation d'espace, ce qui valide la condition $v_i dx^i = \pm c^2 d\tau$.

Il en résulte qu'une particule massive régulière (indépendamment du signe de sa masse), de par sa forme "naturelle", ne peut traverser la membrane : cette région d'espace-temps est peuplée de particules du genre lumière qui se déplacent le long d'hélices du genre lumière.

Par contre, le cas limite des particules avec $m > 0$ ou $m < 0$, est celui des particules de masse relativiste nulle $m = 0$. Du point de vue géométrique, la région qui contient ce type de particules, est tangente aux régions occupées par les particules caractérisées par $m > 0$, ou $m < 0$. Il s'ensuit que les particules de masse nulle, sont capables d'interagir à la fois avec les particules de notre Univers $m > 0$, et avec celles de l'Univers miroir, $m < 0$.

Par définition, les particules de masse relativiste nulle, existent dans une région de l'espace-temps où $ds^2 = 0$, et $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 = 0$. Annulant ds^2 à l'intérieur de la membrane (6.38), on obtient

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,, \tag{6.40}$$

donc, cette condition se vérifie pour deux cas, lorsque :

1) Toutes les valeurs de dx^i s'annulent, $dx^i = 0$;
2) La métrique tridimensionnelle est dégénérée $\tilde{g} = \det \|g_{ik}\| = 0$.

Le premier cas peut se produire dans l'espace-temps régulier, pour les conditions limites à la surface d'un collapsar : lorsque toute la surface se réduit à un point, tous les $dx^i = 0$, et selon $ds^2 = -h_{ik}\, dx^i dx^k = g_{ik}\, dx^i dx^k$ (6.24), la métrique à la surface devient nulle.

Le second cas apparaît à la surface d'un collapsar situé dans le zéro-espace : du fait que la condition $g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2$ est ici vérifiée, on aura toujours $g_{ik}\, dx^i dx^k = 0$, pour $\mathrm{w} = c^2$.

Le premier cas est asymptotique, car en réalité, il ne se produit jamais. Par suite, on peut admettre que des "intermédiaires" échangeant entre notre Univers et l'Univers miroir, soient identifiés aux particules

de masse relativiste nulle, qui peuplent la surface des collapsars situés dans l'espace-temps totalement dégénéré. Autrement dit, ces "intermédiaires" sont des particules nulles (zéro-particules), qui occupent la surface des collapsars dans le zéro-espace.

§ 6.3 Conclusions

Nous avons donc montré que notre Univers est la région observable d'un espace-temps de base, où la coordonnée temporelle est positive, de sorte que toutes les particules possèdent des masses et énergies positives. L'Univers miroir au contraire, est une région de l'espace-temps de base, dans laquelle du point de vue d'un observateur régulier, la coordonnée temporelle est négative, et donc, toutes les particules ont des masses et énergies négatives. Observé à partir de notre Univers, l'Univers miroir est un monde où l'écoulement du temps est inversé, et dans lequel les particules voyagent du futur vers le passé.

Les deux mondes sont séparés par une membrane — une région de l'espace-temps peuplée par des particules du genre lumière, qui voyagent le long de trajectoires hélicoïdales du genre lumière. A l'échelle des particules élémentaires, un tel espace peut être attribué aux particules possédant la propriété d'hélicité, (par exemple, les photons).

Cette membrane empêche le contact entre les particules de masse positive et celles de masse négative, et évite ainsi toute annihilation. Les échanges d'interaction entre les deux mondes, peut s'effectuer au moyen des particules de masse relativiste nulle (zéro-particules), sous certaines conditions physiques qui existent à la surface des collapsars dans l'espace-temps entièrement dégénéré (zéro-espace).

Annexe A Notations des grandeurs physiques

Théorie des invariants chronométriques

b^α	vecteur monade quadridimensionnel
h_{ik}	tenseur tridimensionnel chr.inv.
τ	temps physiquement observable
$d\sigma$	intervalle spatial physique observable
v^i	vitesse tridimensionnelle chr.inv.
A_{ik}	tenseur tridimensionnel antisymétrique chr.inv. de non holonomicité d'espace (rotation)
F^i	vecteur tridimensionnel d'inertie gravitationnelle chr.inv.
w	potentiel de gravitation
v_i	vitesse tridimensionnelle linéaire de rotation d'espace
c^i	vitesse tridimensionnelle de la lumière chr.inv.
D_{ik}	tenseur tridimensionnel chr.inv. des déformations d'espace
Δ^i_{jk}	symboles de Christoffel chr.inv. de deuxième espèce
$\Delta_{jk,m}$	symboles de Christoffel chr.inv. de première espèce

Mouvement des particules

u^α	vitesse quadridimensionnelle
u^i	vitesse tridimensionnelle des coordonnées
P^α	vecteur impulsion quadridimensionnel
p^i	vecteur impulsion tridimensionnel
K^α	vecteur d'onde quadrimensionnel
k^i	vecteur d'onde tridimensionnel
ψ	phase de l'onde (eikonal)
S	action
L	fonction de Lagrange (lagrangien)
$\hbar^{\alpha\beta}$	tenseur quadridimensionnel antisymétrique de Planck
$\hbar^{*\alpha\beta}$	pseudo-tenseur quadridimensionnel dual de Planck

Champs électromagnétiques

A^α	potentiel quadridimensionnel du champ électromagnétique

φ	potentiel scalaire physiquement observable du champ électromagnétique (composante temporelle chr.inv. de A^α)
A^i	potentiel vecteur physiquement observable du champ électromagnétique (composantes spatiales chr.inv. de A^α)
$F^{\alpha\beta}$	tenseur de Maxwell d'un champ électromagnétique
E_i	vecteur tridimensionnel du champ électrique chr.inv.
E^{*ik}	pseudo-tenseur tridimensionnel du champ électromagnétique chr.inv.
H_{ik}	tenseur tridimensionnel du champ magnétique chr.inv.
H^{*i}	pseudo-tenseur tridimensionnel du champ magnétique chr.inv.

Espace riemannien

x^α	coordonnées quadridimensionnelles
x^i	coordonnées tridimensionnelles
t	coordonnée temporelle
s	intervalle d'espace-temps
$g_{\alpha\beta}$	4-tenseur métrique fondamental
δ^α_β	tenseur unité quadridimensionnel
J	déterminant de la matrice de Jacobi (jacobien)
$e^{\alpha\beta\mu\nu}$	4-tenseur unité complètement antisymétrique
e^{ikm}	3-tenseur unité complètement antisymétrique
$E^{\alpha\beta\mu\nu}$	4-tenseur unité discriminant complètement antisymétrique
ε^{ikm}	tenseur complètement antisymétrique chr.inv.
$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$	symboles de Christoffel de deuxième espèce
$\Gamma_{\mu\nu,\rho}$	symboles de Christoffel de première espèce
$R_{\alpha\beta\mu\nu}$	tenseur de courbure de Riemann-Christoffel
$T_{\alpha\beta}$	tenseur d'énergie-impulsion
ρ	densité de matière chr.inv.
J^i	vecteur chr.inv. de la densité d'impulsion
U^{ik}	tenseur des contraintes chr.inv.
$R_{\alpha\beta}$	tenseur de Ricci
K	courbure quadrimensionnelle
C	courbure tridimensionnelle chr.inv.
λ	terme cosmologique (terme-λ)

Annexe B Notations d'algèbre et analyse tensorielles

Différentielle ordinaire d'un vecteur :

$$dA^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma .$$

Différentielle absolue d'un vecteur contravariant :

$$\mathrm{D}A^\alpha = \nabla_\beta\, A^\alpha dx^\beta = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, A^\mu dx^\beta .$$

Différentielle absolue d'un vecteur covariant :

$$\mathrm{D}A_\alpha = \nabla_\beta\, A_\alpha dx^\beta = dA_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, A_\mu dx^\beta .$$

Dérivée absolue d'un vecteur contravariant :

$$\nabla_\beta\, A^\alpha = \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{dx^\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, A^\mu .$$

Dérivée absolue d'un vecteur covariant :

$$\nabla_\beta\, A_\alpha = \frac{\mathrm{D}A_\alpha}{dx^\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, A_\mu\, .$$

Dérivée absolue d'un tenseur contravariant de second rang :

$$\nabla_\beta\, F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, F^{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\, F^{\alpha\mu} .$$

Dérivée absolue d'un tenseur covariante de second rang :

$$\nabla_\beta\, F_{\sigma\alpha} = \frac{\partial F_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, F_{\sigma\mu} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} F_{\alpha\mu}\, .$$

Divergence absolue d'un vecteur :

$$\nabla_\alpha\, A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\, A^\sigma .$$

Divergence chr.inv. d'un vecteur chr.inv. :

$$^*\nabla_i\, q^i = \frac{^*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = \frac{^*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \Delta^j_{ji}\, .$$

Divergence physique chr.inv. :

$$^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = {}^*\nabla_i\, q^i - \frac{1}{c^2}\, F_i\, q^i.$$

Opérateur de d'Alembert covariant :

$$\Box = g^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta\, .$$

Opérateur de Laplace ordinaire :

$$\Delta = -\, g^{ik}\, \nabla_i \nabla_k\, .$$

Opérateur de Laplace chr.inv. :

$$^*\Delta = h^{ik}\, {}^*\nabla_i\, {}^*\nabla_k\, .$$

Dérivée chr.inv. par rapport à la coordonnée temporelle, et par rapport aux coordonnées spatiales :

$$\frac{^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\, \frac{\partial}{\partial t}\, , \qquad \frac{^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\, v_i\, \frac{^*\partial}{\partial t}\, .$$

Carré de la vitesse physiquement observable :

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_i\, \mathrm{v}^i = h_{ik}\, \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k.$$

Vitesse linéaire de rotation d'espace :

$$v_i = -\, c\, \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\, , \quad v^i = -\, c g^{0i} \sqrt{g_{00}}\, , \quad v_i = h_{ik}\, v^k.$$

Carré de v_i : compte tenu de $g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = g_\alpha^\beta$, si $\alpha = \beta = 0$ on a $g_{0\sigma} g^{\sigma 0} = \delta_0^0 = 1$, et $v^2 = v_k v^k = c^2 (1 - g_{00}\, g^{00})$, c'est-à-dire

$$v^2 = h_{ik} v^i v^k.$$

Les déterminants des tenseurs métriques $g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$, sont reliés par :

$$\sqrt{-\, g} = \sqrt{h}\, \sqrt{g_{00}}\, .$$

Dérivée par rapport à l'intervalle de temps physiquement observable :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{^*\partial}{\partial t} + \mathrm{v}^k\, \frac{^*\partial}{\partial x^k}\, .$$

Dérivée première par rapport à l'intervalle d'espace-temps :

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\, \frac{d}{d\tau}\, .$$

Dérivée seconde par rapport à l'intervalle d'espace-temps :

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{c^2 - \mathrm{v}^2}\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{(c^2-\mathrm{v}^2)^2}\left(D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \mathrm{v}_i\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^m}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\mathrm{v}^m\right)\frac{d}{d\tau}\,.$$

Tenseur métrique chr.inv.

$$h_{ik} = -\,g_{ik} + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k\,, \quad h^{ik} = -\,g^{ik}, \quad h^k_i = \delta^k_i\,.$$

Relations de Zelmanov, entre les symboles de Christoffel usuels, et les caractéristiques chr.inv. de l'espace de référence :

$$D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}\Gamma^i_{00}}{g_{00}}\right),$$

$$g^{i\alpha}g^{k\beta}\Gamma^m_{\alpha\beta} = h^{iq}h^{ks}\Delta^m_{qs}\,, \quad F^k = -\,\frac{c^2\,\Gamma^k_{00}}{g_{00}}\,.$$

1ère identité et 2ème identité de Zelmanov :

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right) = 0\,,$$

$$\frac{{}^*\partial A_{km}}{\partial x^i} + \frac{{}^*\partial A_{mi}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial x^m} + \frac{1}{2}\left(F_iA_{km} + F_kA_{mi} + F_mA_{ik}\right) = 0\,.$$

Dérivée de v^2 par rapport au temps physiquement observable :

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{v}^2\right) = \frac{d}{d\tau}\left(h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\right) = 2D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^m}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\mathrm{v}^m + 2\,\mathrm{v}_k\frac{d\mathrm{v}^k}{d\tau}\,.$$

Tenseur complètement antisymétrique chr.inv. :

$$\varepsilon^{ikm} = \sqrt{g_{00}}\,E^{0ikm} = \frac{e^{0ikm}}{\sqrt{h}}\,, \quad \varepsilon_{ikm} = \frac{E_{0ikm}}{\sqrt{g_{00}}} = e_{0ikm}\sqrt{h}\,.$$

Bibliographie

1. Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1917, tome 42, 173–205.
2. Tangherlini F. R. The velocity of light in uniformly moving frame. A dissertation. Stanford University, 1958. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 44–110.
3. Malykin G. B. and Malykin E. G. Tangherlini's dissertation and its significance for physics of the 21th century. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 121–143.
4. Recami E. Classical tachyons and possible applications. *Rivista del Nuovo Cimento*, 1986, vol. 9, 1–178.
5. Liberati S., Sonego S., and Visser M. Faster-than-c signals, special relativity, and causality. *Annals of Physics*, 2002, vol. 298, 151–185.
6. Terletskii Ya. P. The causality principle and the second law of thermodynamics. *Soviet Physics Doklady*, 1961, vol. 5, 782–785 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1960, vol. 133, no. 2, 329–332).
7. Bilaniuk O.-M. P., Deshpande V. K., and Sudarshan E. C. G. "Meta" relativity. *American Journal of Physics*, 1962, vol. 30, no. 10, 718–723.
8. Feinberg G. Possibility of faster-than light particles. *Physical Review*, 1967, vol. 159, no. 5, 1089–1105.
9. Zelmanov A. Chronometric invariants. Dissertation, 1944. American Research Press, Rehoboth (NM), 2006.
10. Landau L. D. and Lifshitz E. M. The classical theory of fields. GITTL, Moscow, 1939. Referred with the 4th edition, Butterworth-Heinemann, 1980 (all these were translated in 1951–1980 by Morton Hammermesh).
11. Zelmanov A. L. Chronometric invariants and accompanying frames of reference in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, 1956, vol. 1, 227–230 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1956, vol. 107, no. 6, 815–818).
12. Zelmanov A. L. and Agakov V. G. Elements of the General Theory of Relativity. Nauka, Moscow, 1988 (*in Russian*).
13. Zelmanov A. L. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 33 – 63 (translated from a manuscript of 1957).

14. Cattaneo C. General Relativity : relative standard mass, momentum, energy, and gravitational field in a general system of reference. *Nuovo Cimento*, 1958, vol. 10, 318–337.
15. Cattaneo C. Conservation laws in General Relativity. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 11, 733–735.
16. Cattaneo C. On the energy equation for a gravitating test particle. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 13, 237–240.
17. Cattaneo C. Problèmes d'interprétation en Relativité Générale. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, no. 170 "Fluides et champ gravitationel en Relativité Générale", Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1969, 227–235.
18. Raschewski P. K. Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959 (translated by W. Richter) ; reprinted by Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993.
19. Rabounski D. and Borissova L. Particles here and beyond the mirror. 2nd edition (revised and expanded), Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2008.
20. Terletskii Ya. P. and Rybakov Yu. P. Electrodynamics. Vishaya Shkola (High School Publishers), Moscow, 1980 (*in Russian*).
21. Papapetrou A. Spinning test-particles in General Relativity. I. *Proceedings of the Royal Society A*, 1951, vol. 209, 248–258.
22. Corinaldesi E. and Papapetrou A. Spinning test-particles in General Relativity. II. *Proceedings of the Royal Society A*, 1951, vol. 209, 259–268.
23. Suhendro I. A four-dimensional continuum theory of space-time and the classical physical fields. *Progress in Physics*, 2007, vol. 4, 34–46.
24. Suhendro I. Spin-curvature and the unification of fields in a twisted space. Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2008.
25. Del Prado J. and Pavlov N. V. Private reports to A. L. Zelmanov, 1968.
26. Stanyukovich K. P. Gravitational field and elementary particles. Nauka, Moscow, 1965 (*in Russian*).
27. Stanyukovich K. P. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *Problemy Teorii Gravitazii i Elementarnykh Chastiz*, vol. 1, Atomizdat, Moscow, 1966, 267–279 (*in Russian*).
28. Stanyukovich K. P. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 99–110 (translated from a manuscript of 1965).
29. Weber J. General Relativity and gravitational waves. Interscience Publishers, New York, 1961, 200 pages (referred with the reprint by Dover Publications, Mineola, NY, 2004).
30. Petrov A. Z. Einstein spaces. Pergamon Press, Oxford, 1969 (translated by R. F. Kelleher, edited by J. Woodrow).

31. Petrov A. Z. The classification of spaces defining gravitational fields. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 81–98 (translated from *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, 1954, vol. 114, no. 8, 55–69).
32. Grigoreva L. B. Chronometrically invariant representation of the classification of Petrov gravitational fields. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, 579–582 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1970, vol. 192, no. 6, 1251–1254).
33. Gliner E. B. Algebraic properties of energy-momemtum tensor and vacuum-like states of matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (*JETP*), 1966, vol. 22, no. 2, 378–383 (translated from *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1966, vol. 49, no. 2, 543–548)
34. Gliner E. B. Vacuum-like state of medium and Friedmann's cosmology. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, 559–562 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1970, vol. 192, no. 4, 771–774).
35. Sakharov A. D. The initial stage of an expanding Universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (*JETP*), 1966, vol. 22, 241–249 (translated from *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1966, vol. 49, 345–453).
36. Synge J. L. Relativity : the general theory. North Holland, Amsterdam, 1960 (referred with the 2nd edition, Foreign Literature, Moscow, 1963).
37. Schouten J. A. und Struik D. J. Einführung in die neuren Methoden der Differentialgeometrie. Noordhoff, Groningen, 1938 (first published in *Zentralblatt für Mathematik*, 1935, Bd. 11 und Bd. 19).
38. McVittie G. C. Remarks on cosmology. *Paris Symposium on Radio Astronomy* (IAU Symposium no. 9 and URSI Symposium no. 1, July 30 — August 6, 1958), Stanford University Press, Stanford, 1959, 533–535.
39. Oros di Bartini R. Some relations between physical constants. *Soviet Physics Doklady*, 1965, vol. 10 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1965, vol. 163, no. 4, 861–864).
40. Oros di Bartini R. Relations between physical constants. *Progress in Physics*, 2005, vol. 3, 34–40 (translated from *Problemy Teorii Gravitazii i Elementarnykh Chastiz*, vol. 1, Atomizdat, Moscow, 1966, 249–266).
41. Crothers S. J. On the general solution to Einstein's vacuum field for the point-mass when $\lambda = 0$ and its consequences for relativistic cosmology. *Progress in Physics*, 2005, vol. 3, 7–18.
42. Kottler F. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 1918, Bd. 361, Nr. 14, 401–462.
43. Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, vol. 29, no. 3, 423–428.
44. Schiff L. I. Sign of gravitational mass of a positron. *Physical Review Letters*, 1958, vol. 1, no. 7, 254–255.

45. Terletskii Ya. P. Paradoxes in the theory of relativity. Plenum Press, New York, 1968 (translated from Terletskii Ya. P. Paradoksy teorii otnositelnosti. Patrice Lumumba University Press, Moscow, 1965).

46. Terletskii Ya. P. Paradoxes in the theory of relativity. *American Journal of Physics*, 1969, vol. 37, no. 4, 460–461.

Index

action 90, 146
action de longue portée 27
asymétrie du mouvement le long de l'axe t 22, 25

Bartini R., voir *di Bartini R.*
Biot-Savart (loi de) 72
bivecteur 33

Cattaneo C. 12
"charge" magnétique 73
Christoffel E. B. 8
classification T pour la matière 214
collapse gravitationnel 229
collapse inflationnaire 235
Compton (longueur d'onde de) 193
contraction des tenseurs 36
conservation de la charge électrique (loi de) 67
corps de référence 12
courbure d'espace quadridimensionnelle 205, 209–212
— scalaire 203
courbure tridimensionnelle observable 220–223
cylindre des évènements 169

del Prado J. 70
dérivée 47
de Sitter (métrique) 227
— (espace) 210, 218, 222, 223, 224–228, 234–237
di Bartini R. 223–225
différentielle 8, 45
divergence 47

eikonal (phase de l'onde) 23
— équation 23, 26
Einstein A. 203, 205
— (constante) 204
— (équations) 203
— (espaces) 207–212, 226
— (tenseur) 203
équation de continuité 68
équations du mouvement 8, 21
— particule chargée 86–89
— particule libre 21–26
— particule à spin 155, 157
équation d'état 217
espace isotrope 197, 202
espace nul (dégénéré) 25
— conditions physiques 26, 248
espace pseudo-riemannien 7
espace riemannien 7

fonction de Lagrange 146
fonction temporelle 21
force d'inertie gravitationnelle 18
forces de gravitation non newtoniennes 212, 227

Gliner E. B. 208

hélicité 194
hologramme 27
holonomicité d'espace 13
— (tenseur de) 18
horizon d'évènements 223

impulsion de spin 141, 150
inflanton 235
invariants chronométriques 13
inversion explosion 225

jacobien 44

Kottler (métrique) 228

Levi-Civita T. 8
— (transport parallèle) 8

ligne de temps 13
ligne géodésique 8

Mach (principe) 206
Maxwell (équations) 66, 70–72
Minkowski (équations) 78, 92
mouvement (libre) géodésique 8
mouvement non géodésique 27
multiplication des tenseurs 35

objet géométrique 32
observateur d'accompagnement 13
opérateur de d'Alembert 56
opérateur de Laplace 56
opérateurs de projection 14

Papapetrou A. 28
particules élémentaires 189–194
particules nulles 25
Pavlov N. V. 70
Petrov A. Z. 207
— (classification) 208
— (théorème) 210
principe du miroir 24
produit scalaire 37
produit vectoriel 39
pseudo-tenseurs 42

quantification des particules élémentaires (loi de) 189–191

référentiel galiléen 41
réseau de coordonnées 12
Riemann B. 7
rotationnel 54

scalaire 32
Schwarzschild (métrique) 226
signature d'espace-temps 7, 147, 209
section spatiale 13
Stanyukovich K. P. 73
substance 212
symboles de Christoffel 8, 19, 34
Synge J. L. 210, 217, 239

tenseur 32
tenseur antisymétrique 40
tenseur unité antisymétrique 41
trajectoires 9
Terletskii Ya. P. 240
tenseur unité 15
tenseurs des viscosités 216
tenseur des vitesses de déformation 19
tenseurs discriminants 43–44
tenseur du champ électromagnétique 61
tenseur de Planck 143–145
tenseur d'énergie-impulsion 81, 204, 212–215
terme-λ 204, 212, 222
tenseur métrique fondamental 8, 29
tenseur métrique observable 16
tenseur de courbure de Riemann-Christoffel 220
tenseur de Ricci 73
trace 37
trou noir 229

Univers miroir 211

vacuité 203, 206, 214
valeurs physiquement observables 11–14
vecteur de Poynting 82
vecteur monade 14
vecteur courant 69
vitesse des coordonnées 147
vide-μ 209, 214
— propriétés physiques 215–217
vide 203, 206, 214
— propriétés physiques 216–217

Weber J. 222

Zelmanov A. L. 10, 12, 21, 206, 211, 219
— (théorème) 17
— (tenseur de courbure) 219
zéro-espace, voir *espace nul*
zéro-particules, voir *particules nulles*

À propos des auteurs

Larissa Borissova (née en 1944, à Moscou, Russie) est ancienne élève de la Faculté d'Astronomie, Département de Physique de l'Université d'état de Moscou. Elle a débuté en 1964 en suivant l'enseignement du Dr. Abraham Zelmanov (1913–1987), l'éminent cosmologiste et chercheur en relativité générale. En 1968, elle suit également l'enseignement du Prof. Kyril Stanyukovich (1916–1989), le spécialiste renommé de la dynamique des gaz en relativité générale. En 1975, Larissa Borissova reçoit son doctorat d'état, qui couronne ses travaux sur les ondes gravitationnelles. Larissa Borissova a publié près de 30 articles scientifiques, et 6 ouvrages sur la relativité générale et la gravitation. En 2008, elle devient éditeur associée du journal *The Abraham Zelmanov Journal*. Elle poursuit depuis, ses études scientifiques en tant que chercheuse indépendante.

Dmitri Rabounski (né en 1965, à Moscou, Russie), est l'ancien élève de l'École Supérieure de Physique de Moscou. Dès 1983, il suit l'enseignement du Prof. Kyril Stanyukovich (1916–1989), le spécialiste éminent de la dynamique des gaz en relativité générale. Il suit également l'enseignement du Dr. Abraham Zelmanov (1913–1987), cosmologiste réputé et spécialiste de la relativité générale, et au cours des années 80, celui du Dr. Vitaly Bronshten (1913–2004), expert réputé dans le domaine de la destruction des corps en atmosphère. Dmitri Rabounski a publié près de 30 articles scientifiques et 6 ouvrages couvrant la relativité générale, la gravitation, la physique des météoroides et l'astrophysique. En 2008, Dmitri Rabounski a fondé un nouveau journal international spécialisé en relativité générale, *The Abraham Zelmanov Journal*, qu'il dirige en tant qu'éditeur en chef, tout en poursuivant ses études scientifiques comme chercheur indépendant.

CHAMPS, VIDE, ET UNIVERS MIROIR

par Larissa Borissova et Dmitri Rabounski

Cet ouvrage est la traduction française du livre *Fields, Vacuum and the Mirror Universe* publié originalement en anglais en 2009, par les physiciens Larissa Borissova et Dmitri Rabounski, enrichi de nouveaux exposés.

Le livre propose une analyse physico-mathématique nouvelle en élaborant une théorie des observables dans le cadre de la relativité générale. Dans leur célèbre livre de référence *Théorie des Champs*, Lev Landau et Evgeny Lifshitz ont décrit de manière très complète le mouvement des particules dans les champs électromagnétique et gravitationnel. Les méthodes d'analyse covariante alors en vigueur depuis le milieu des années 30 ne prenaient pas encore en compte les concepts de quantités physiquement observables (grandeurs chronologiquement invariantes ou plus précisément grandeurs dites "chronométriques") de la relativité générale. Les auteurs ont donc voulu insister sur la nécessité d'étendre cette perspective mathématique à la théorie physique existante en l'appliquant au mouvement des particules se déplaçant dans les champs électromagnétiques et gravitationnels. De plus, l'étude des mouvements d'une particule douée de moment de rotation intrinsèque, n'a pas été entreprise dans ce contexte par Landau et Lifshitz. C'est pourquoi un exposé séparé du livre a été entièrement consacré à ce type de mouvement particulier. Les auteurs ont également ajouté un chapitre redéfinissant les éléments d'algèbre tensorielle et d'analyse dans le cadre des invariants chronométriques. L'ensemble de cet ouvrage se présente alors comme une contribution supplémentaire à la *Théorie des Champs*.

ISBN 978-1-59973-123-0
American Research Press, 2010, 263 pages
Printed in the USA / Imprimé aux États Unis

US $36.00 / EUR €27.00

ISBN 978-1-59973-123-0
9 781599 731230 >